

## RAČUNANJE OPTIMALNE DUŽINE POJEDINAČNOG UZORKA ZA ODREĐIVANJE SADRŽAJA METALA U RUDI

S 4 tabele i 2 priloga

### UVOD

Već se dulje vrijeme u rudniku Ljubija osjeća potreba određivanja jedne stalne duljine pojedinačne probe za pojedine tipove rude, koja bi dala najtočnije rezultate analiza. Do sada je uzimanje uzoraka bilo proizvoljno, tako, da su duljine pojedinačnih proba varirale od 0,5 metara pa sve do 24,4 metra. Pretpostavljalo se da ovako nesistematsko uzimanje pojedinačnih proba može dovesti do bitnih pogrešaka u određivanju srednjeg sadržaja pojedinih lokaliteta. Na inicijativu prof. dr inž. I. Jurkovića pristupili smo obradi tog problema. Za tu svrhu je vrlo pogodno rudište »Paljevina« u ljubijskom rudnom bazenu, jer je broj istražnih radova, kao i broj kemijskih analiza na tom lokalitetu dovoljno velik. Osim toga u tom rudištu su prisutni svi glavni tipovi rude, pa se smatra da bi ono moglo biti reprezentant za sva ostala rudišta istog genetskog tipa u ljubijskom rudnom bazenu. Za tip ležišta rudnog kršja i branta potrebno je izvršiti slične analize.

Na kraju zahvaljujemo prof. dr inž. I. Jurkoviću na korisnim savjetima u toku rada.

### I GEOLOSKE PRILIKE

Rudište Paljevina nalazi se u sklopu Južnih ljubijskih rudišta. Leži cca 7 km zračne udaljenosti južnije od mjesta Ljubija i jedan je od najznačajnijih objekata u ljubijskom rudnom bazenu.

Na području Paljevina nalazimo sedimente mlađeg paleozoika – gornjeg karbona i perma. Gornjokarbonski sedimenti razvijeni su u facijesu auerniških slojeva i predstavljani su organoklastičnim vapnencima, kvarc-sericitskim, subgrauvaknim pješčenjacima, silt-pješčenjacima i škriljalcima i u manjoj mjeri glinovitim škriljalcima. Ti su sedimenti zahvaćeni dvjema orogenetskim fazama čiji se tragovi danas jasno zaapažaju. To su salska faza variscijske orogeneze, koja je dala strukture smjera pružanja SI–JZ i alpska orogeneza, koja je dala strukture smjera SZ–JI. Tektonika je rasjedna.

Permski sedimenti su predstavljeni crvenim i bijelim kvarc-hematitskim pješčenjacima i hematit-kvarc-sericitskim silt-pješčenjacima i škriljalcima. Diskordantni su na karbonu i pretrpjeli su samo alpsku tektoniku.

Rudna tijela su vezana za vapnenjački kompleks gornjeg karbona i primarno su imala oblik produženih leća. Ona su zahvaćena i variscijskom i alpskom orogenezom, te su rasjedima raskomadana i poredana u stepeničaste blokove. Do sada je ustanovljena ova parageneza rudišta: *ankerit, siderit, kvarc, albit, nemalit, sericit, kalcedon, pirit, halkopirit, minerali glina (ilit), sulfidno-organska supstanca, getit, psilomelan i piroluzit*.

Genetski rudište pripada sedimentnom tipu i nastalo je obaranjem Fe-karbonata iz viskoznih koloidnih otopina u obliku sideritsko-ugljevito-glineno-sulfidnog mulja (I. Jurković, 1961). Današnji strukturno-teksturni tipovi rudne supstance rezultat su epigenetskih preobrazbi i prekrystalizacija (I. Jurković, 1961). Jedan dio rudišta je potpuno oksidirao u kvalitetni limonit.

Rudište Paljevine istraživano je bušenjem po mreži od 50 m, te je izbušeno 227 bušotina s ukupnom duljinom od cca 23.000 m. Iz jezgre je po točkastoj metodi uzeto 1075 uzoraka koji su kemijski analizirani. Srednji sadržaj dobiven računanjem iz ovih analiza je ovaj:

*ankerit*: 26,92% Fe, 1,39% Mn, 4,76% SiO<sub>2</sub>

17,88% CaO, 5,12% MgO

*limonit*: 39,91% Fe, 1,75% Mn, 9,22% SiO<sub>2</sub>.

## II. RAČUNANJE OPTIMALNE DULJINE UZORKA

Kao što smo već ranije rekli zadatak ovog proračuna je da pokaže postoji li neka određena – optimalna – duljina pojedinačnog uzorka koja bi pogrešku uzorkovanja svela na minimum. Pogreška uzorkovanja vjerojatno utiče na točnost rezultata analiza, pa je konačna svrha ovog računanja određivanje duljine uzorka koja bi omogućila dobivanje najrealnijih vrijednosti sadržaja metala u rudi. Kao prvo u proračunu potrebno je odrediti srednju vrijednost sadržaja metala u rudi i pokazatelj varijacije sadržaja od srednje vrijednosti, tzv. disperziju  $s^2$  odnosno standardnu devijaciju  $s$ .

### 1. Srednja vrijednost i disperzija podataka

Neka je cijela izvađena jezgra jedne bušotine  $L_k$  metara. Duljina jezgre sa rudom neka je  $L_k$  metara. Iz te jezgre uzimaju se uzorci duljina  $l_i$ . Kod toga mora vrijediti

$$\sum_i l_i = L_k$$

Neka je postotak metala u  $i$ -tom uzorku  $p_i$ . Srednja vrijednost postotka metala računa se kao ponderirana srednja vrijednost podataka koji su dobiveni analizom svih uzoraka

$$M_K = \frac{\sum_i p_i l_i}{L_K}$$

Budući da imamo  $N$  bušotina, srednja vrijednost sadržaja za cijelo polje biti će

$$P = \frac{\sum_{k=1}^N M_K L_K}{\sum_{k=1}^N L_K}$$

Pitanje je s kojom duljinom probe treba uzorkovati da interval u kojem se nalazi prava srednja vrijednost bude najmanji. Duljinu uzorka za koju to vrijedi nazvati ćemo optimalnom.

Raspolagali smo sa 1.075 uzoraka različitih duljina s lokaliteta Pa-ljevine, koje su geolozi rudnika Ljubije uzimali pri oprobavanju istraž-nih radova. Sve uzorke smo prema duljinama klasificirali u 12 razreda i to:

1. uzorci duljine ispod	0,5 m	
2. uzorci duljine između	0,5— 1,5 m	— sredina 1 m
3. uzorci duljine između	1,5— 2,5 m	— sredina 2 m
4. uzorci duljine između	2,5— 3,5 m	— sredina 3 m
5. uzorci duljine između	3,5— 4,5 m	— sredina 4 m
6. uzorci duljine između	4,5— 5,5 m	— sredina 5 m
7. uzorci duljine između	5,5— 6,5 m	— sredina 6 m
8. uzorci duljine između	6,5— 7,5 m	— sredina 8 m
9. uzorci duljine između	7,5— 8,5 m	— sredina 9 m
10. uzorci duljine između	8,5— 9,5 m	— sredina 10 m
11. uzorci duljine između	9,5— 10,5 m	— sredina 11 m
12. uzorci duljine preko	10,5 m	

Dvije klase s ruba, prvu s duljinom ispod 0,5 m i drugu iznad 10,5 m nismo mogli razmatrati zbog premalog broja elemenata.

Takvu smo podjelu izvršili posebno za limonit i posebno za ankerit.

Za svaku od tih klasa izračunata je srednja vrijednost sadržaja že-ljeza

$$M_j = \frac{\sum_{i=1}^{N_j} p_{ji}}{N_j}$$

gdje je

$M_j$  srednji sadržaj klase »j«  $j = (1, 2, \dots, 10)$

$P_{ji}$  vrijednost podataka u klasi »j«

$N_j$  broj podataka u klasi »j«

Svaka od tih klasa daje nam procjenu standardne devijacije te klase

$$S_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_j} (p_{ji} - M_j)^2}{N_j - 1}}$$

U teoriji vjerojatnosti dokazuje se relacija

$$P\left(M_j - t \frac{S_j}{\sqrt{N_j}} < M < M_j + t \frac{S_j}{\sqrt{N_j}}\right) = \Phi(t)$$

tj. vjerojatnost da se prava srednja vrijednost  $M$  nalazi u intervalu

$$M_j \pm t \frac{S_j}{\sqrt{N_j}}$$

jednaka je  $\Phi(t)$ .

Uz istu vjerojatnost  $\Phi(t)$  i isti broj elemenata iz kojih računamo  $M_j$  granice u kojima se nalazi  $M$  ovise samo o standardnoj devijaciji  $s_j$ . Što je  $s_j$  manji, interval je manji. Prema tome optimalna će biti ona duljina pojedinačnog uzorka za koju je standardna devijacija najmanja.

Prije nego iz dobivenih vrijednosti standardnih devijacija nanesenih u tabelama 1. i 2. izvodimo bilo kakove zaključke, treba ispitati da li su razlike između standardnih devijacija bitne ili se nalaze u granicama dozvoljenih slučajnih odstupanja. To se pokazuje tzv. testiranjem ili uspoređivanjem disperzija.

## 2. Testiranje disperzije

Za uspoređivanje disperzija koristili smo kriterij Fishera. Neka je

$$F_j = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

kvocijent dviju varijanaca koje uspoređujemo. Uspoređivat ćemo varijancu  $j$ -tog razreda sa varijancom svih ostalih podataka koja se računa po formuli

$$s^2 = \frac{\sum_{j=1}^m Q_j}{\sum_{j=1}^m (N_j - 1)} \quad m - \text{broj klasa}$$

gdje je

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N_j} p_{ji}^2 - N_j M_j^2$$

Dalje koristimo jednakost

$$P(F_j > F_\beta) = 1 - (1 - \beta)^m$$

tj. vjerojatnost da je  $F_j > F_\beta$  jednaka je izrazu na desnoj strani. Vrijednosti za  $F_\beta$  nalaze se u odgovarajućim tablicama.

$$\text{Za } \beta = 0,05 \quad P(F_j > F_{0,05}) = 0,40$$

$$\text{Za } \beta = 0,01 \quad P(F_j > F_{0,01}) = 0,09$$

STANDARDNA DEVIJACIJA I SREDNJE VRIJEDNOSTI ZA LIMONIT  
*Standard deviation and medians for limonite*

TABELA 1.  
 Table 1.

Klasa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N_j$	73	75	44	26	15	14	7	6	7	10
$M_j$	39,36	39,18	35,94	39,05	36,41	37,14	42,18	34,85	39,48	42,37
$s_j^2$	102,3918	115,2779	128,7191	130,7053	102,3353	132,4324	195,0248	212,1122	32,6174	151,5972

STANDARDNA DEVIJACIJA I SREDNJA VRIJEDNOST ZA ANKERIT  
*Standard deviation and medians for ankerite*

TABELA 2.  
 Table 2.

Klasa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N_j$	173	210	135	55	36	27	17	8	9	8
$M_j$	27,95	27,53	27,04	26,61	25,05	27,54	26,29	26,63	24,80	26,36
$s_j^2$	58,0371	45,8321	49,6753	75,3860	77,3929	64,2606	51,0442	91,3899	70,9074	90,3531

Braun i Hitrec: Prinos određivanju metala u rudi

Posljednja vjerojatnost je dovoljno mala.

Ako za jedan  $F_j$  ipak vrijedi  $F_j > F_{0,01}$  možemo smatrati sa 90% sigurnosti da se  $s_j$  bitno razlikuje od srednje disperzije ostalih podataka.

Ispitujući na taj način disperzije (tabela 3. i 4.) izlazi da su za limonit svi  $F_j < F_{0,01}$ , dakle su svi  $s_j$  jednako vrijedni i nemamo razloga smatrati niti jednu duljinu probe optimalnom.

Za ankerit izlazi  $F_2 > F_{0,01}$ , te imamo osnova da zaključimo da je duljina probe od 2 m optimalna.

TABELA 3.

Table 3.

VRIJEDNOSTI  $F_j$  I  $F_{\beta}$  ZA LIMONIT*Values of  $F_j$  and  $F_{\beta}$  for limonite*

Klasa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_j$	1,14	1,03	1,17	1,19	1,11	1,18	1,75	1,91	3,70	1,36
$F_{0,05}$	1,45	1,37	1,46	1,56	2,19	1,73	2,14	2,26	3,71	1,92
$F_{0,01}$	1,70	1,65	1,69	1,86	3,11	2,20	2,87	3,10	6,99	2,49

TABELA 4.

Table 4.

VRIJEDNOSTI  $F_j$  I  $F_{\beta}$  ZA ANKERIT*Values of  $F_j$  and  $F_{\beta}$  for ankerite*

Klasa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_j$	1,05	1,32	1,16	1,39	1,41	1,16	1,10	1,64	1,27	1,63
$F_{0,05}$	1,28	1,19	1,25	1,36	1,46	1,50	2,01	2,03	1,96	2,03
$F_{0,01}$	1,41	1,30	1,58	1,54	1,70	1,76	2,86	2,68	2,55	2,68

## 3. Kontrolne karte

Da se u toku istraživanja mogu zapaziti bitne promjene u standardnoj devijaciji i srednjoj vrijednosti podataka koriste se kontrolne karte. Te promjene mogu nastati zbog ulaska u kvalitetno bitno različito rudno područje, pogrešnog uzimanja pojedinačnih uzoraka (bilo u odnosu na duljinu ili metodiku uzimanja), promjena u točnosti laboratorijskih ispitivanja itd.

Podaci koji se dobivaju sistematiziraju se u grupe po 5 elemenata, te se za svaku grupu računa srednja vrijednost

$$\bar{X}_i = \frac{\sum_{j=1}^5 X_{ij}}{5}$$

i raspon unutar grupe  $-\omega$  (razlika između najmanje i najveće vrijednosti u grupi).

Na kontrolnu kartu se nanosi centralna linija koja odgovara srednjoj vrijednosti i 2 para kontrolnih linija. Zbog potpune kontrole potrebno je izraditi kontrolne karte posebno za srednju vrijednost i posebno za raspon unutar grupa.

Granične linije za kontrolne karte računaju se na ovaj način:

Za dijagram srednjih vrijednosti:

$$\begin{aligned} l_u &= \bar{X} \pm \bar{\omega} \cdot 0,377 & l_v &= \bar{X} \pm \bar{\omega} \cdot 0,594 \\ l_{ug} &= \bar{X} + \bar{\omega} \cdot 0,377 & l_{vg} &= \bar{X} + \bar{\omega} \cdot 0,594 \\ l_{ud} &= \bar{X} - \bar{\omega} \cdot 0,377 & l_{vd} &= \bar{X} - \bar{\omega} \cdot 0,594 \end{aligned}$$

$l_u$  — interval između unutarnjih graničnih linija

$l_{ug}$  — gornja granična linija

$l_{ud}$  — donja granična linija

$l_v$  — interval između vanjskih graničnih linija

$l_{vg}$  — gornja vanjska granična linija

$l_{vd}$  — donja vanjska granična linija

Za dijagram raspona unutar grupa

$$\begin{aligned} l_{ug} &= S \cdot 4,20 & l_{vg} &= S \cdot 5,48 & \text{Brojčani faktori} \\ l_{ud} &= S \cdot 0,85 & l_{vd} &= S \cdot 0,37 & \text{nalaze se u odgo-} \\ & & & & \text{varajućim tablicama} \end{aligned}$$

Ukoliko ne raspolažemo vrijednostima  $s$  i  $\bar{X}$  koje su dobivene na temelju ranijeg istraživanja, možemo te dvije vrijednosti procijeniti iz prvih 20 grupa po 5 elemenata:

$$S = \frac{\bar{\omega}}{2,326} \quad \bar{X} = \frac{\sum_{k=1}^{20} \bar{X}_{ik}}{20}$$

Vrijednosti  $X_j$  i  $\omega$  nanosimo na dijagram. Ako nam više od  $1/20$  nanesenih točaka izlazi izvan unutarnjih kontrolnih linija možemo to smatrati kao upozorenje da je došlo do promjene srednje vrijednosti odnosno disperzije. Ukoliko nam točke padaju izvan vanjskih graničnih linija više od  $1/1000$  ukupnog broja točaka možemo sa sigurnošću smatrati da je došlo do promjene u srednjoj vrijednosti, odnosno disperziji.

Na dijagramu 1 i 2 nanesene su vrijednosti  $X_j$  (u % Fe) i  $\omega_j$  (u % Fe). Kontrolne linije za ankerit računane su iz podataka koji su dobiveni probama duljine 2 m (optimalna duljina). Budući da od ostalih 48 podataka pada izvan unutarnjih kontrolnih linija više od  $1/20$  točaka postoji opravdana sumnja da probe većih duljina nisu tako točne kao proba duljine 2 m.

Na kontrolnim kartama limonita vidi se da nema nikakvih bitnih razlika u točnosti oprobavanja različitim duljinama pojedinačnih uzoraka.

*K. Braun, Geološka služba,  
Rudnik Ljubija  
U. Hitrec, Zavod za matematiku  
Tehnološkog fakulteta  
Zagreb, Pierottijeva 6*

*Primljeno 27. 9. 1962.*

#### LITERATURA

- Braun K., (1962): Rudište Paljevine u Ljubijском rudnom bazenu (diplomski rad). Zagreb.
- Janković S., (1957): Oprobavanje i proračun rezervi mineralnih sirovina, Beograd.
- Jurković I., (1961): Minerali željeznih rudnih ležišta Ljubije kod Prijedora. Geološki vjesnik, 14, Zagreb.
- Mitropoljskij A. K., (1961): Tehnika statističeskijh vičisljenij, Moskva.
- Waerden, van der (1960): Matematičeskaja statistika, Moskva.
- Vranić V., (1958): Vjerojatnost i statistika, Zagreb.

**K. BRAUN and V. HITREC:**

#### CALCULATION OF THE OPTIMAL LENGTH OF INDIVIDUAL SAMPLES FOR THE DETERMINATION OF THE CONTENT OF METAL IN ORES

On the basis of data obtained from explorations of the locality of Paljevina in the Ljubija Basin, there was carried out a calculation of the optimal length of individual samples.

We will call »optimal length« that which yields the narrowest interval within which is to be found the true average value of the required percentage of metal in ores.

All samples are classified according to their lengths. By calculating the standard deviations for each of the classes, and with the application of Fischer's test for the comparison of the dispersions, it was shown that trials of different lengths in limonite do not yield essentially different results, but that the length trial of 2 m. ankerite differs by its accuracy from trials of other lengths. We will consider the 2 m. trial in ankerite to be optimal.

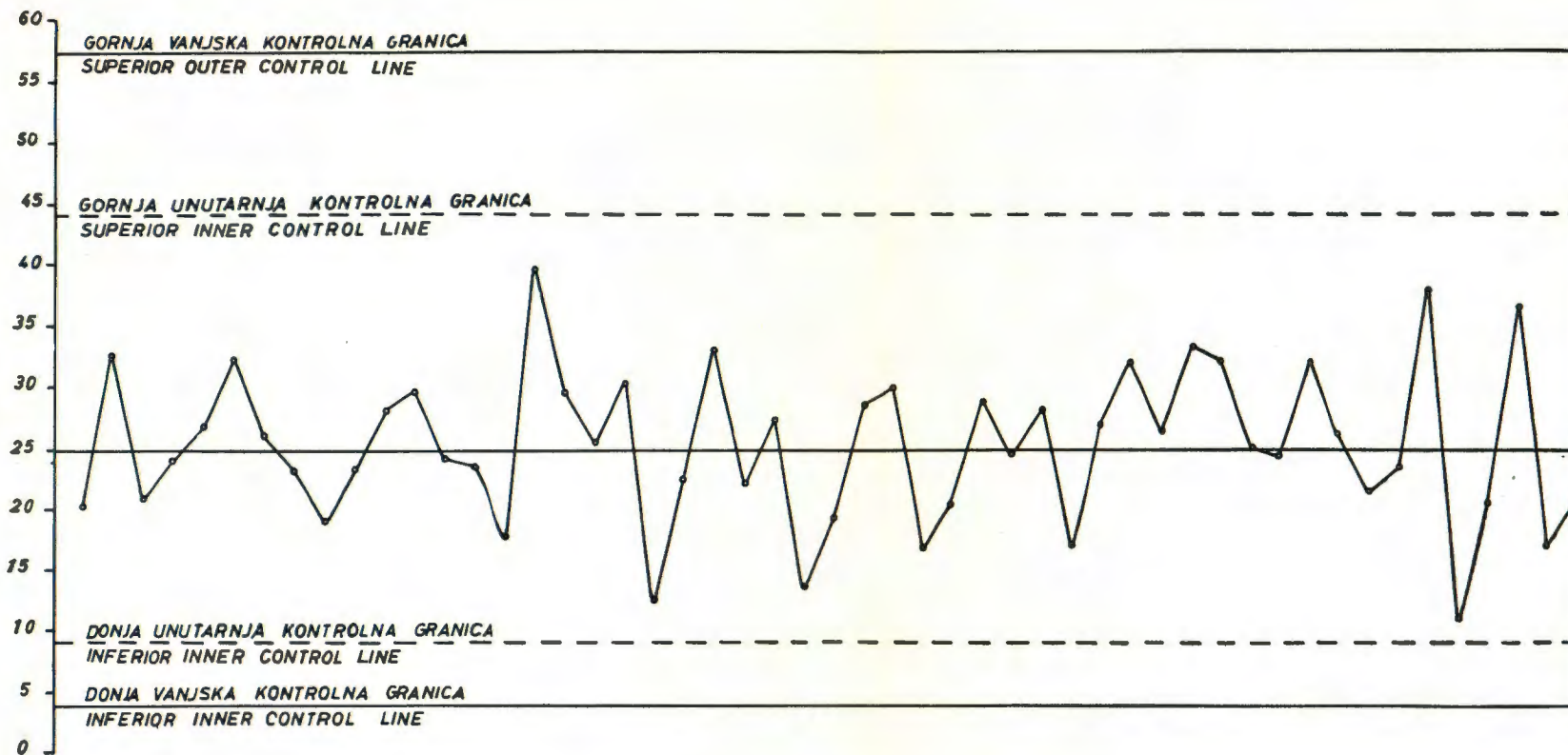
The article likewise contains the method of control of the exploration process by means of control cards. Control cards elaborated separately for limonite and ankerite respectively yield the same results as obtained by calculating and testing the dispersions.

*K. Braun, Geologic Services,  
Ljubija Mines  
U. Hitrec, Institute of Mathematics,  
Faculty of Technology, Zagreb,  
Pierottijeva 6.*

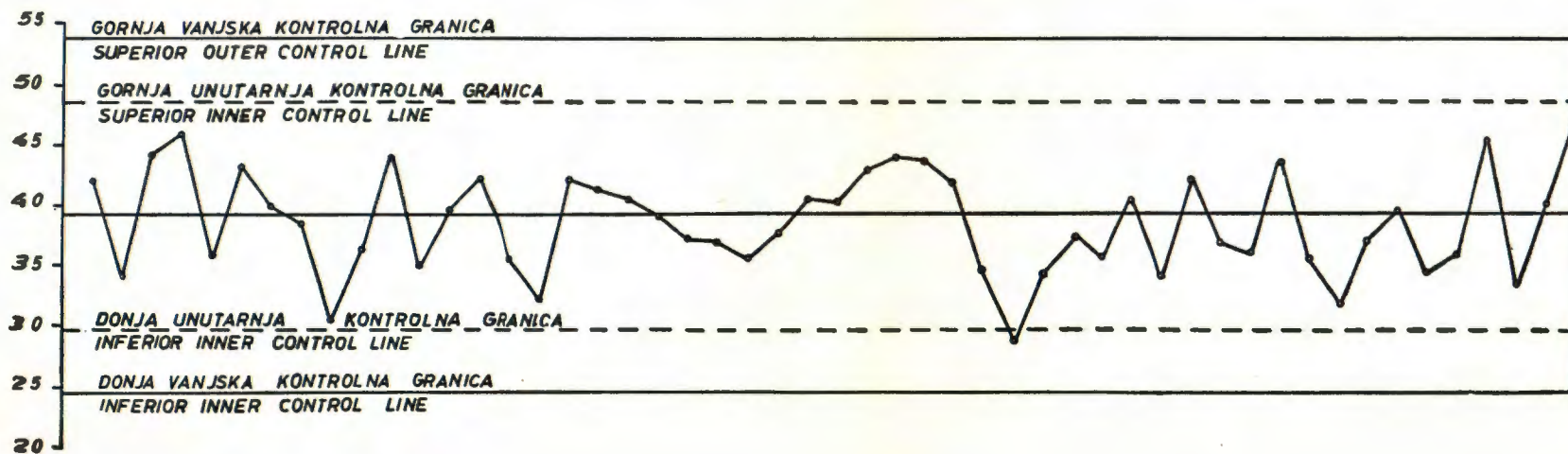
*Received 27th September, 1962.*



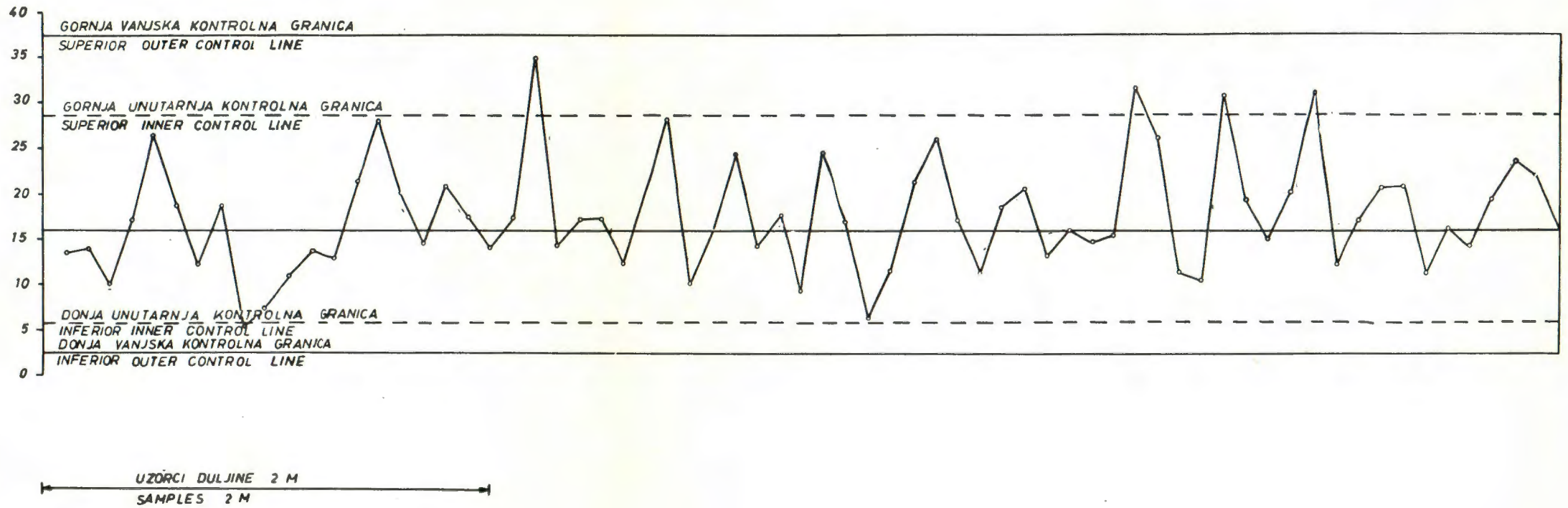
3  
KARTA RASPONA  
Diagram of intervals  $\omega$



KARTA SREDNJIH VRIJEDNOSTI  $\bar{x}$   
Diagram of medial values  $\bar{x}$



3  
KARTA RASPONA  
Diagram intervals



$\bar{x}$   
KARTA SREDNJIH VRIJEDNOSTI  
Diagram of medial values

