548.0 : 513.3

LJUDEVIT BARIĆ

OD PRAVILNIH POLIEDARA SAMO SE NEKI MOGU POJAVITI U KRISTALNOM SVIJETU

(Sa 8 slika u tekstu)

Više puta se čuje, kako se pravilni poliedri u prirodi opažaju kao kristalne tvorevine. To međutim ne odgovara činjeničnom stanju. Samo neki od tih poliedara javljaju se kao kristalni oblici, dok se za druge od njih može strogo pokazati ,da ne mogu biti nazočni u kristalnom svijetu. Pokušajmo to razmotriti na jednostavan način. Ta razmatranja moraju obuhvatiti više raznolikih područja. Ona se moraju odnositi na neke poučke o poliedrima, jer su kristali zapravo poliedri, koji su nastali sami od sebe, bez posredstva čovjeka čak i u slučaju, da se radi o kristalima, koje priređujemo u našim laboratorijima ili tvornicama. U tim razmatranjima moraju uz to biti sadržane i pravilnosti, koje su utvrđene na kristalima. Zadatak je prema tomu ponešto složen. Neka bude napomenuto, da će se sve, što slijedi, lakše razumjeti, ako si načinimo modele, npr. od drva, ili ako si nacrtamo dobre slike.

I. Eulerov poučak o konveksnim poliedrima

Kristali predstavljaju poliedre omeđene više-manje ravnim plohama. One su kadšto tako ravne, kao da smo ih izbrusili i fino polirali. Kristali pojedinci predstavljaju tzv. konveksne ili ispupčene poliedre. Produžimo li koju god plohu takvoga poliedra na sve strane, ona neće nigdje presijecati poliedar. Za takve konveksne poliedre izveo je znameniti matematičar L. E u l e r – 1707–1783) poučak o tom, u kakvom međusobnom odnosu stoji broj ploha p, broj uglova (rogljeva) u i broj bridova b. Po njemu se taj poučak zove Eulerov poučak o poliedrima.

Plohe, kojima je omeđen neki poliedar, mogu biti — općenito uzevši – različiti mnogokuti, npr. trokuti, četverokuti, peterokuti itd. Svaki mnogokut možemo, međutim, povlačenjem raznih njegovih dijagonala rastaviti u trokute.

Odaberemo li unutar poliedra jednu točku pa je spojimo s uglovima (rogljevima) poliedra, tad će ta točka predstavljati zajednički vrh svih piramida, od kojih je poliedar sastavljen; baze tih piramida bit će plohe poliedra. Budući da svaku tu graničnu plohu možemo – kako smo malo prije naveli – rastaviti u trokute, možemo dalje reći, da za svaki poliedar možemo zamisliti, da je sastavljen od samih trostranih piramida, kojima je zajednički vrh spomenuta odabrana točka u nutrini poliedra, a baze su im trokutasti dijelovi pojedinih graničnih ploha poliedra. Svaka takva piramida ima četiri ugla (roglja) (u=4), četiri plohe (p=4) i šest bridova (b=6), pa možemo reći, da je za nju

$$u+p=b+2 \qquad (1)$$

Zamislimo sad, da smo uz tu piramidu prislonili susjednu trostranu piramidu tako, da se pokriju njihove dvije kongruentne postrane plohe. Broj uglova (rogljeva) se na taj način povećao za 1. Za koliko se ukupno povećao broj ploha? Od prve piramide ostale su tri plohe, budući da četvrta prekrivena ostaje u nutrini i na taj način otpada. Od druge piramide ostaju tri plohe slobodne, jer četvrta kongruentna pada u nutrinu. Sada imamo dakle ukupno mjesto prijašnje 4 plohe njih ukupno 6, tj. 2 više nego prije. Razmotrimo još, za koliko se povećao broj bridova. Od 6 bridova nove piramide onaj, kojim će se doticati baze obih piramida već postoji na bazi prve piramide. Isto tako će se prekriti i dva ovršna brida kongruentnih ploha. Od ukupno 6 bridova druge piramide ostat će dakle slobodna samo 3 nova brida; broj bridova u toj kombinaciji iznosit će prema tomu ukupno 9. Označimo li novi broj uglova (rogljeva), ploha i bridova u spomenutoj kombinaciji sa u_1, p_1 i b_1, tad možemo reći, da je sada

$$u_1=5 \qquad p_1=6 \qquad b_1=9.$$

Vidimo, da je opet

$$u_1+p_1=b_1+2$$

tj. broj uglova (rogljeva) i ploha, uzeto zajedno, opet je za 2 veći od broja bridova, isto kao što je bio to slučaj i prije (vidi izraz 1). Ako prislonimo treću trostranu piramidu, a da se osim dvije kongruentne postrane plohe pri tom ne pokrije nijedna druga ploha, opet će se broj uglova povećati za 1, broj ploha za 2 i broj bridova za 3, zbog čega mora suma $u+p$ opet ostati za 2 veća od broja bridova b. (Lijevu i desnu stranu izraza 1 povećamo naime za isti broj, lijevu za 1+2, a desnu za 3).

Pri tom postepenom dodavanju dogodit će se međutim i to, da baze dviju piramida padnu u jednu te istu ravninu (ukoliko su te baze predstavljene trokutima iste granične plohe poliedra). Mjesto za 2, broj ploha će se u ovom slučaju povećati samo za 1, ali će istovremeno otpasti i jedan brid i to onaj, u kojem se sastaju obje baze. Radi toga će opća pravilnost, da je ukupni broj uglova (rogljeva) i ploha za dva veći od broja bridova, vrijediti i za takve slučajeve.

Pri daljnjem postepenom dodavanju pojedinih trostranih piramida ostvarit će se i slučaj, da će jedna od novo prislonjenih piramida upasti u prostor između dvije ranije dodane piramide. U tom će se slučaju dvije postrane plohe netom prislonjene piramide prekriti sa kongruentnim plohama već ranije dodanih dviju piramida. Sad će od dosad postojećeg broja ploha p radi prekrivanja dvije otpasti, tj. ostat će ih $p-2$. ali će i dvije nove od netom prislonjene piramide (i to baza i jedna postrana ploha) pridoći, zbog čega ćemo nakon izvršenog prislanjanja imati ukupno $p-2+2$ ploha. Broj ploha se dakle u ovom slučaju neće izmijeniti. Povećat će se međutim broj uglova (rogljeva) i bridova za 1, zbog čega će vrijednost jednadžbe (1) ostati i dalje sačuvana (jer desnoj i lijevoj njenoj strani dodajemo 1).

Zamislimo sada, da smo takvim postepenim slaganjem došli dotle, da je ostala prazna još rupa, u koju treba staviti posljednju trostranu piramidu, kako bi se sve popunilo. U tom slučaju pokrit će se sve tri postrane plohe sa odgovarajućim plohama prijašnjih piramida. Broj ploha p smanjit će se u tom slučaju za 2, a istodobno će otpasti i šiljak piramida kao ugao. Smanjit će se pri tom i broj bridova b za 3. U jednadžbi (1) oduzet će se na lijevoj strani 3 i na desnoj strani isto toliko, radi čega konačno izlazi, da je broj svih uglova (rogljeva) i ploha, $u+p$, uvijek, tj. za sve konveksne poliedre, jednak broju njihovih bridova uvećanom za dva.

Kao primjer uzmimo kocku (heksaedar). Ona ima 6 ploha, 8 uglova i 12 bridova. Za nju prema Eulerovom poučku imamo 6+8=12+2. Isto se može reći i za poliedar predstavljen kutijom šibica.

Golema četverostrana Keopsova piramida u Egiptu, izgrađena povrh kvadratične baze ima ukupno 5 ploha (bazu i četiri postrane plohe). Ima 5 uglova (rogljeva) (četiri na bazi i peti je vrh piramide). Bridova ima ukupno 8 (četiri na bazi i četiri među pobočnim plohama). Za nju je 5+5=8+2.

II. Koliko ima pravilnih poliedara?

Što se zapravo razumije pod nazivom »pravilan poliedar«? Tako se označuju oni poliedri, koji su omeđeni samim sukladnim pravilnim mnogokutima, odnosno takvim mnogokutima, kojima su sve stranice i svi kutovi jednaki. Među trokutima je pravilan npr. istostraničan trokut, među četverokutima samo kvadrat itd. Svi bridovi takvoga poliedra su jednako dugački i svi njegovi prostorni uglovi (rogljevi) su sukladni. Prikloni kutovi među pojedinim plohama – često kažemo: plošni kutovi – su isti.

Dade se lako i jednostavno pokazati, da je broj pravilnih poliedara veoma ograničen. Pokušajmo to dokazati imajući na umu, da se u svakom uglu (roglju) pravilnoga poliedra (npr. kocke) sastaje jednaki broj bridova i jednaki broj pobočnih ploha.

Ako pomislimo, da su pobočne plohe – kako smo rekli – pravilni mnogokuti, svaki sa po n stranica i ako je broj ploha ukupno p, tad će umnožak np biti jednak dvostrukom broju bridova.

$$np=2b$$

jer se u svakom bridu, kojih broj iznosi b, sastaju po dvije stranice.

Ako se pak u svakom uglu (roglju) sastaje m ploha ili strana i ako na poliedru ima – kako smo to već prije označili – ukupno u uglova, tad umnožak mu predstavlja dvostruki broj bridova na poliedru

$$mu=2b$$

jer svaki brid polazi iz dva ugla (zbog čega smo ga dvaput računali). Na temelju toga možemo broj ploha p i broj uglova (rogljeva) u poliedra ovako izraziti

$$\mathrm{p} = \frac{2b}{n} \qquad \mathrm{u} = \frac{2b}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Uvrstimo li to u Eulerov poučak (1), dobit ćemo

$$\frac{2b}{n} + \frac{2b}{m} = b+2$$

a odatle se lako dade izvesti izraz

$$b = \frac{2mn}{2\,(m+n) - mn} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

koji govori o tome, kako broj bridova b na pravilnom poliedru ovisi o tom, koliko se ploha (m) sastaje u svakom njegovom uglu (roglju) i koliko stranica (n) ima svaka ta ploha, tj. da li se radi o pravilnom trokutu, četverokutu, peterokutu itd.

Za broj bridova b u izrazu (3) dolaze u obzir samo pozitivne vrijednosti. Da bi to bilo ostvareno, mora u nazivniku biti

$$2\,(m+n) > mn \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Uz to m i n moraju biti jednaki ili veći od 3

$$m \geq 3 \qquad \mathrm{i} \qquad n \geq 3 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

jer pravilni mnogokut mora imati barem 3 jednake stranice ($n = 3$, istostranični trokut) i u svakom uglu (roglju) pravilnoga poliedra sastaju se barem tri njegove plohe ($m = 3$).

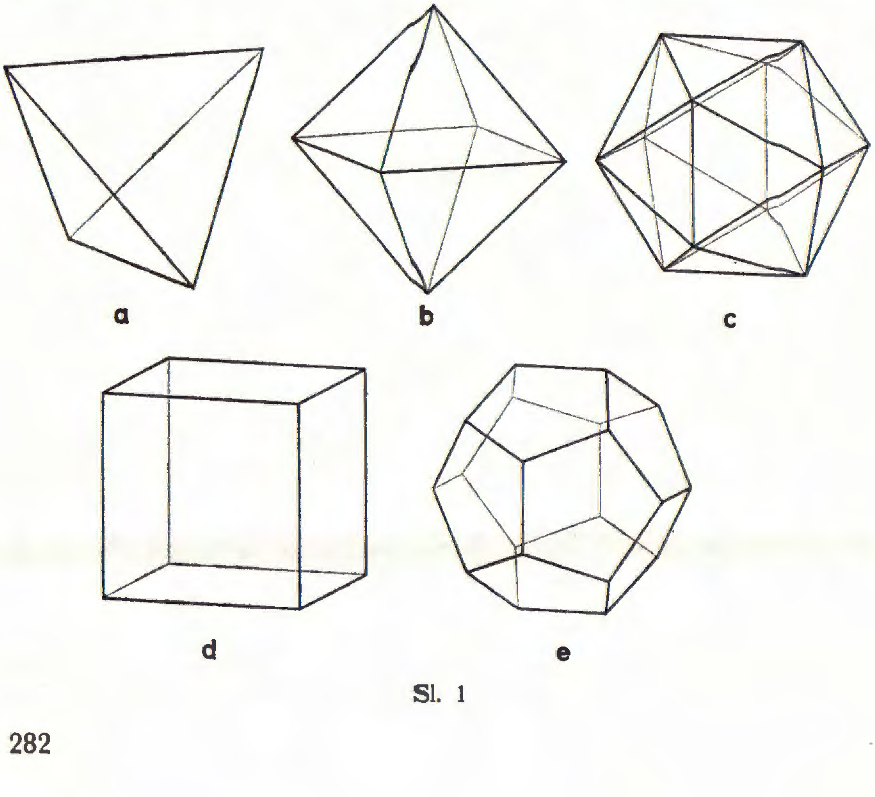
Uzevši u obzir izraze (4) i (5), lako ćemo uvidjeti, da će jednadžbu (3) zadovoljavati samo ovih pet parova za vrijednosti m i n:

1.	$n=3$,	$m=3$,	$b=6$,	$p=4$,	$u=4$	tetraedar
2.	$n=3$,	$m=4$,	$b=12$,	$p=8$,	$u=6$	oktaedar
3.	$n=3$,	$m=5$,	$b=30$,	$p=20$,	$u=12$	ikozaedar
4.	$n=4$,	$m=3$,	$b=12$,	$p=6$,	$u=8$	heksaedar (kocka)
5.	$n=5$,	$m=3$,	$b=30$,	$p=12$,	$u=20$	dodekaedar

Prema tomu postoji samo pet pravilnih poliedara. Prvi od njih, za koji su podaci navedeni pod rednim brojem 1, ima 4 plohe ($p=4$) (zbog toga naziv prema grčkomu tetra, četiri), 4 ugla ($u=4$) i 6 bridova ($b=6$). Plohe su pravilni mnogokuti sa 3 stranice, tj. istostrani trokuti ($n=3$), a u svakom uglu teatraedra sastaju se po 3 plohe ($m=3$) (sl. 1a).

Drugi, za koji su podaci navedeni pod rednim brojem 2, zove se oktaedar, jer ima 8 ploha ($p=8$) (prema grčkomu okto, osam). On ima šest uglova ($u=6$), 12 bridova ($b=12$). Plohe su istostrani trokuti ($n=3$), a u svakom uglu se sastaju 4 plohe ($m=4$) (sl. 1b).

Treći (podaci dani pod br. 3) ima 20 ploha ($p=20$) i odatle mu ime (prema grčkom eikosi, dvadeset). One su istostrani trokuti ($n=3$). U svakom od njegovih 12 uglova (rogljeva) ($u=12$) sastaje se po 5 ploha ($m=5$). Ima ukupno 30 bridova ($b=30$) (sl. 1c).



Sl. 1

Pravilni poliedar, za koji su podaci navedeni pod 4, predstavlja svima poznatu kocku ili heksaedar (grčki heks, šest) radi toga, što ima šest ploha ($p=6$) (sl. 1d). Ima 8 uglova (rogljeva) ($u=8$); u svakom od njih sastaju se 3 plohe ($m=3$). Svaka od tih ploha je pravilan mnogokut omeđen sa 4 jednake stranice ($n=4$), koje su međusobno okomite; to su kvadrati.

Podaci navedeni pod br. 5 odnose se na pravilni poliedar, koji ima 12 ploha ($p=12$), zbog čega se zove dodekaedar (prema grčkomu dodeka, dvanaest) (sl. 1e). Svaka ploha je pravilni peterokut (pentagon) ($n=5$). U svakom njegovom uglu sastaju se bridovi triju ploha ($m=3$). Ima 20 uglova (rogljeva) ($u=20$) i 30 bridova ($b=30$).

Od tih pet pravilnih poliedara tri su, i to tetraedar, kocku i dodekaedar ,poznavali već pitagorejci u klasičnoj Heladi. Platonov prijatelj Theetet otkrio je još i oktaedar i ikozaedar te dokazao, da pravilnih poliedara ima ukupno pet. Platon u svom dijalogu »Timej« stavlja 5 pravilnih poliedara u vezu s elementima svijeta, vatrom, uzduhom, zemljom i vodom, radi čega se ti poliedri nazivlju i »platonova tjelesa«. Atomi tih elemenata imaju redom oblik tetraedra, oktaedra, kocke i ikozaedra. Pravilni pentagonski dodekaedar odgovara prema Platonu svemiru.

Od pet pravilnih poliedara kao kristalni oblici mogu se pojaviti samo tri, i to tetraedar, heksaedar i oktaedar. Pravilni pentagonski dodekaedar i ikozaedar ne mogu doći u kristalnom svijetu. To je u vezi s osnovnim zakonima kristalografije, sa zakonom o stalnosti plošnih (bridnih) kutova i sa zakonom razmjerno malih cjelobrojnih (ili racionalnih) koeficijenata. Moramo se prema tomu ukratko upoznati sa sadržajem tih dvaju zakona.

III. Zakon o stalnosti plošnih ili bridnih kutova

Pred nedugo vrijeme navršilo se trista godina, otkako je Danac Nikola Stensen (Nicolaus Steno) otkrio taj zakon. Bilo je to 1669. godine. Da bi nam sadržaj toga zakona postao jasniji, zamislimo da uzgajamo u posudi umjetne kristale, npr. od modre galice. Vidjet ćemo, da oni s vremenom postaju sve veći. Mjerimo li na jednom od njih, dok su još maleni, pomoću goniometra njegove kutove pa načinimo li to kasnije, kad on izraste veći, lako ćemo se uvjeriti, da se kutovi na početno malom i kasnije na povećanom kristalu nisu izmijenili. Ta važna konstatacija može se nadopuniti na taj način, što ona ne vrijedi samo za jedan te isti kristal pri njegovom rastu nego i za razne kristale određene neke supstancije, bez obzira na to, da li smo kristale sami priredili u laboratoriju ili smo ih sabrali u raznim nalazištima po Zemlji, odnosno ako su oni doneseni i sa Mjeseca. Po Stensenu, koji je tu pravilnost otkrio proučavajući kristale kremena, hematita, dijamanta i pirita, zove se taj zakon i Stenov zakon o stalnosti plošnih ili bridnih kutova na kristalima. Na taj su način zapravo položeni temelji na kojima se počela izgrađivati kristalografija.

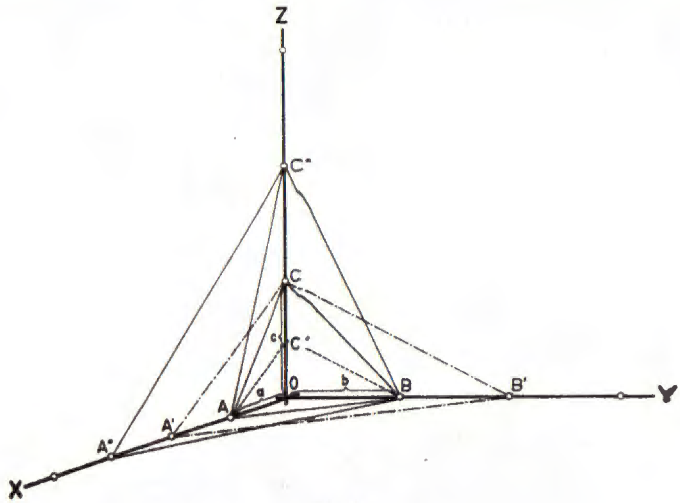
Iz toga zakona izlazi, da se pri rastu kristala supstancija mora odlagati makar u kako tankim, npr. čak i molekularno ili atomarno tankim, ali uvijek u paralelnim slojevima. Samo se na taj način može objasniti činjenica, da kutovi među pojedinim plohama (ili bridovima) ostaju stalni, nepromjenjivi. Za kristal prema tomu nije karakteristična njegova veličina, dužina njegovih bridova ili površina, broj odnosno oblik njegovih ploha ili njegov volumen. Sve se to od kristala do kristala određene kristalizirane supstancije može mijenjati. Ono što je stalno i nepromjenjivo, to su kutovi među plohama ili bridovima na kristalima.

IV. Zakon o razmjerno malim racionalnim (ili cjelobrojnim) koeficijentima

Potkraj 18. stoljeća je francuski učenjak René Just Haüy otkrio drugi od osnovnih zakona kristalografije. Sadržaj toga zakona mogao bi se kratko prikazati ovako:

Budući da je kristal prostorno tijelo, potreban je za određivanje položaja raznih ploha na njemu prostorni koordinatni sistem od tri osi X, Y i Z (sl. 2). Za te osi uzimlju se tri važna i istaknuta brida na kristalima dotične supstancije odnosno smjer tih bridova predstavljen je kao presjek triju kristalnih ploha. Na kockastim kristalima kuhinjske soli to su tri brida, koja se sastaju u jednom uglu kocke; treba ih samo u mislima pomaknuti paralelno u središte kocke.

Odaberemo li sad neku četvrtu plohu, koja siječe sve tri osi (na sl. 2 ploha ABC), tad možemo reći, da je njezin položaj određen dužinom odsječka OA= a, OB=b i OC=c na osima X, Y i Z. Općenito uzevši ti odsječci ne moraju biti nipošto jednaki, kao što ni koordinatne osi ne moraju u svakom slučaju biti međusobno okomite.



Sl. 2

Pogleda li se sad, koliko puta su veći odsječci drugih kristalnih ploha na osima X, Y i Z, tad se dolazi do zaključka, da su odsječci tih daljnjih ploha nekoliko puta (npr. 2, 3, 4, ½, ⅔ itd. puta) veći od odsječaka a, b, c, koje odsijeca ploha ABC. Ti koeficijenti su razmjerno mali racionalni brojevi. Tako npr. za plohu A' B' C vidimo iz sl. 2, da njeni odsječci stoje u ovom međusobnom odnosu.

$$2a : 2b : c$$

Za plohe A" B C", zatim A B C', pa ABC" itd. odsječci redom predstavljaju ove međusobne odnose

$$3a : b : 2c \quad \text{zatim}$$
$$a : b : \tfrac{1}{2}c \quad \text{pa}$$
$$a : b : 2c \quad \text{itd.}$$

Taj se zakon radi toga zove zakon razmjerno jednostavnih racionalnih koeficijenata. Pa i razlomaka se možemo u tim omjerima lako riješiti. Zamislit ćemo npr. s obzirom na omjer

$$a : b : \tfrac{1}{2}c$$

da je kristal dvaput veći – a to smijemo zamisliti, jer prema prvom osnovnom zakonu veličina nije karakteristična za kristale – pa ćemo taj omjer moći napisati u ovom obliku

$$2a : 2b : c$$

Radi toga se zakon razmjerno malih racionalnih koeficijenata može izreći i kao zakon razmjerno malih cjelobrojnih koeficijenata. S obzirom na netom spomenuto može se reći, da su odsječci, koje pojedine plohe odsijecaju na kristalnim osima, na istoj osi mali višekratnici jedne te iste dužine.

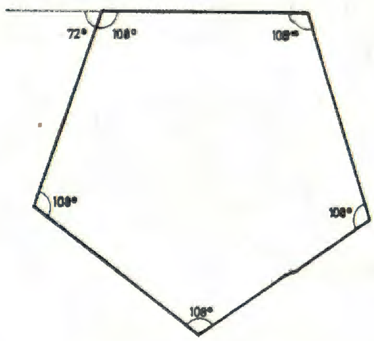
Taj zakon, koji je od principijelne važnosti za naša poimanja o pravilnoj unutarnjoj građi kristalnoga stanja, može se izreći i na više drugih načina. U to se ovdje ne trebamo upuštati.

Za naša daljnja razmatranja od važnosti je sada to, da se za pravilni pentagonski dodekaedar, i slično za ikozaedar, može pokazati da su ti koeficijenti iracionalni brojevi, a to je protivno spomenutom zakonu razmjerno malih racionalnih ili razmjerno jednostavnih cijelih brojeva. Radi toga se ta dva pravilna poliedra ne mogu naći među kristalnim oblicima.

V. Za plohe pravilnog dodekaedra jedan je od koeficijenata iracionalan

Taj je poliedar prikazan na sl. 1e. Svaka njegova ploha je pravilan peterokut (sl. 3), čije se stranice sijeku pod putom od 72⁰ (odnosno 108⁰).

Prostorne odnose najlakše ćemo moći uočiti, ako ih po određenom propisu predočimo – tako reći prefotografiramo – u ravnini.



Sl. 3

a) Stereografska projekcija pravilnoga pentagonskoga dodekaedra

To preslikavanje izvršit ćemo – jer će to najbolje koristiti našim daljnjim razmatranjima – na ovaj način. Zamislimo oko dodekaedra kuglu tako, da se njeno središte podudara s ishodištem prostornoga koordinatnoga sistema odnosno sa središtem dodekaedra. Svaku plohu dodekaedra nadomjestit ćemo normalom, oborenom na tu plohu iz središta kugle. Ploha je zapravo nakon te zamjene predstavljena jednostavnijom geometrijskom tvorevinom, pravcem. Mjesto sa plohama dodekaedra imat ćemo ubuduće posla sa svježnjem plošnih normala, pri čemu se ishodište svežnja plošnih normala podudara sa središtem kugle.

Svaka normala probada kuglu u određenoj točki. Ta točka predstavlja dakle zapravo odgovarajuću plohu dodekaedra, preslikanu na površinu kugle.

Da bismo mogli razmatranja vršiti u ravnini – a to nam je svakako zgodno radi pravljenja crteža na papiru, zatim radi štampanja knjiga itd. – taj razmještaj točaka, kojima je određen međusobni prostorni razmještaj plošnih normala, a prema tomu i pojedinih ploha na dodekaedru, prenijet ćemo sa kugle u ravninu u našem slučaju ovako. Zamislimo, da se ravnina XY iz sl. 2 podudara s ekvatorskom ravninom kugle. Iznad te ravnine nalazi se sjeverni ,a ispod iste ravnine južni pol kugle. Udaljenost obaju polova na površini kugle od ekvatorske ravnine odnosno od ravnine XY jednaka je dakako polumjeru kugle. Odnose na gornjem dijelu polukugle, tj. onoga njezinoga dijela, koji je iznad ekvatorske ravnine, prenijet ćemo sada u tu ravninu tako, da pomislimo, da se svaka točka sa kugle pomiče do ekvatorske ravnine po spojnici te točke i južnoga pola. Kad se na taj način koja mu drago točka sa površine kugle prenese u ekvatorsku ravninu, mi kažemo, da smo uradili stereografsku projekciju. Ona je bila poznata još u staroj Heladi. Ako se njom služimo, tad možemo odnose u prostoru jasno i pregledno razmatrati u ravnini.

Ako na opisani način to uradimo sa našim pravilnim pentagonskim dodekaedrom, dobit ćemo crtež predstavljen slikom 4. Unutar velikoga kruga, koji još zovemo osnovnim krugom projekcije, moramo si sve zamisliti, da je kao polukugla izdignuto iznad ravnine crteža. Plohe dodekaedra, čije normale izlaze na gornjoj polukugli ili leže u samoj ekvatorskoj ravnini, stereografski su preslikane u sl. 4 u ravninu u obliku točaka, koje se nalaze u središtu malih krugova označenih brojkama 1 do 8. Zamislimo li plohe dodekaedra pomaknute paralelno samima sebi dotle, dok ne prođu kroz središte kugle odnosno kroz ishodište prostornoga koordinatnoga sustava XYZ, tad će svaka ploha na površini kugle zacrtati trasu odgovarajućega najvećega kruga. Ti krugovi dakle predstavljaju plohe. Tako npr. plošnoj normali 3 odgovara ploha predočena kružnim lukom CAB. Plošnoj normali 1 odgovara ploha prikazana kružnim lukom DBEY; slično je plošnom normalom 2 predočena ploha, koja je ucrtana kao kružni luk DCFY.

Kružni lukovi sijeku se u određenim točkama, npr. točkama B, C, D, E, F itd. Budući da kružni lukovi predstavljaju plohe, onda njihovi presjeci predstavljaju presjeke tih ploha, tj. bridove. Bridovi se sijeku pod kutovima, koji su nam poznati. Oni za pravilni peterokut iznose 72^0 ($=360^0 : 5$) ili suplement od toga (108^0) npr. kut BC u sl. 4) ili 36^0 ($=180 — 2.72^0$) (kut BE u sl. 4) itd.

Na sl. 4 dobro je vidljiva i izvjesna simetrija u raspodjeli točaka 1 do 8. Ona odgovara ravninama simetrije dodekaedra, koje se podudaraju s osnim ravninama XY (horizontalna, u sl. 4 prikazana osnovnim krugom projekcije), XZ (vertikalna) i YZ (vertikalna). Te tri međusobno okomite ravnine simetrije odgovaraju ujedno plohama heksaedra (kocke).

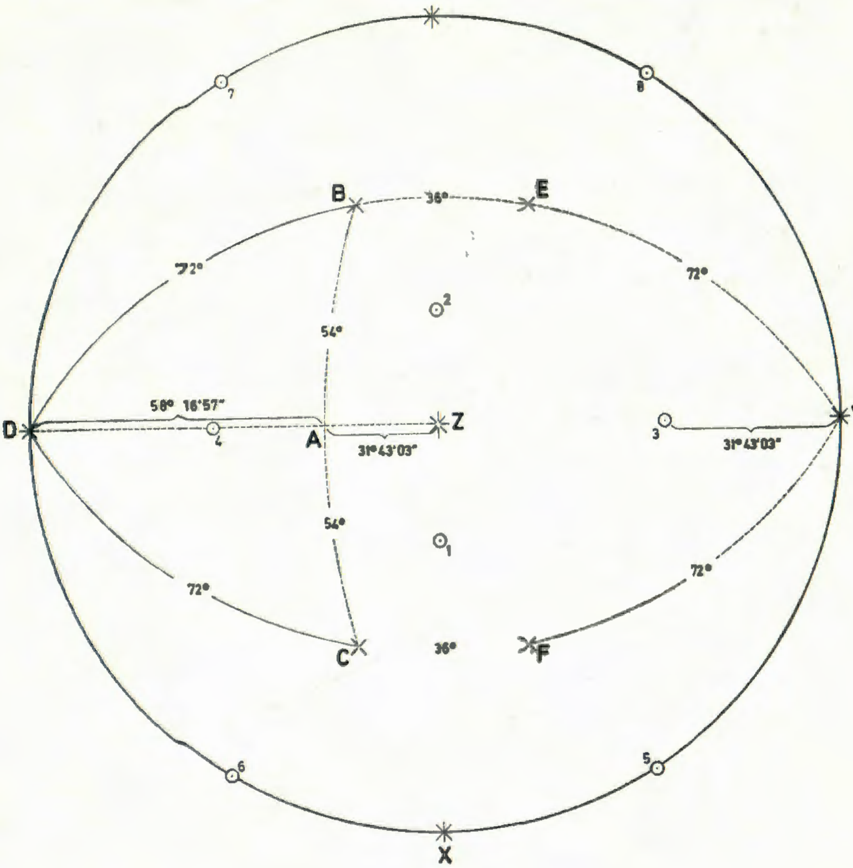
b) Izračunavanje plošnoga kuta dodekaedra iz bridnih kutova

Da bismo riješili taj zadatak, svratimo pažnju na trokut BAD u sl. 4 imajući na umu, da se radi o trokutu na površini kugle, tj. o sfernom trokutu omeđenom kružnim lukovima $BD=72^0$, $AB=54^0$ ($=108^0 : 2$) i lukom nepoznate veličine AD, koju možemo po pravilima sferne trigonometrije iz spomenutoga sfernoga pravokutnoga trokuta (pravi kut je kod A) pomoću formule

$$\cos AD = \frac{\cos BD}{\cos AB} \quad \text{odnosno} \quad \cos AD = \frac{\cos 72^0}{\cos 54^0}$$

izračunati. Kao rezultat ćemo dobiti, da je

$$AD = 58^0\, 16'\, 57''$$



Sl. 4

Komplement toga kuta odgovara luku

$$AZ = 31^0 43' 03''$$

Ova potonja vrijednost za nas je vrlo važna. Budući da je (sl. 4) smjer Y okomit na smjer Z i budući da je luk CAB kao ploha dodekaedra okomita na svoju normalu 3, to možemo reći, da je kut

$$Y3 = 31^0 43' 03'' \; (=AZ)$$

To je kut, koji čini koordinatna os Y (koja odgovara normali na plohu heksaedra) sa normalom 3 na plohu dodekaedra. On je jednak kutu Z1, jer je Z također koordinatna os i 1 normala na plohu dodekaedra. Zbog ranije spomenutih simetrijskih odnosa je dakle

$$Z1 = Z2 = 31^0 43' 03''$$

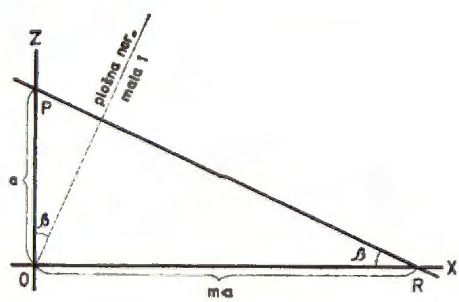
odnosno kut među normalama 1 i 2 na plohe dodekaedra iznosi 63°26'. Kut među plohama samim jednak je suplementu od 63° 26' odnosno plohe dodekaedra nagnute su jedna prema drugoj pod kutom 116° 34'.

c) Izračunavanje koeficijenta m za duži odsječak ploha dodekaedra na koordinatnim osima

Ploha dodekaedra predočena svojom okomicom 1 paralelna je sa koordinatnom osi Y, a siječe koordinatne osi X i Z. Odnosi su radi bolje jasnoće prikazani na sl. 5. Ploha dodekaedra, okomita na ravninu crtnje, prikazana je u toj slici pravcem PR. Označimo li dužinu njenoga odsječka OP na osi Z sa a, tad se duži odsječak OR na koordinatnoj osi X može prikazati kao umnožak

$$ma$$

gdje koeficijent m mora biti veći od od 1. Taj se koeficijent može izračunati iz poznatog kuta, koji čini plošna normala 1 sa koordinatnom osi Z, a veličina mu iznosi 31° 43' 03". Na sl. 5 on je označen sa β.



Sl. 5

Iz sl. 5 se naime vidi, da je

$$\cot g\beta = ma : a = m$$

On je – kako ćemo to sad pokazati – iracionalan. Učinit ćemo to pomoću kuta AD=58°16'57" (sl. 4), čiji je kosinus jednak omjeru

$$\cos 72^0 : \cos 54^0.$$

Razmatranjem jednoga od istokračnih trokuta, koji se dobiju iz pravilnoga deseterokuta, može se izvesti (vidi npr. Škreblin, S.: Trigonometrija, Zagreb 1944, p. 12), da je

$$\cos 72^0 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right) \text{ i } \cos 54^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

Odatle se može izračunati, da je

$$\cos AD = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right) : \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \quad \text{ili} \quad \cos AD = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

Budući da su AD i AZ komplementni kutovi, to je

$$\cos AD = \sin AZ$$

a AZ odgovara zapravo kutu β u sl. 5.

Može se prema tomu napisati

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

Iz $\sin \beta$ se može izračunati

$$\cos \beta = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$

Za $\operatorname{cotg}\beta$ sada izlazi

$$\operatorname{cotg} \beta = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = m$$

Vidi se dakle, da je koeficijent m iracionalan, a to je u protivnosti sa zakonom razmjerno malih racionalnih koeficijenata.

Taj koeficijent $m = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$

dade se i malo drugačije izraziti. Udvostruči li se brojnik i nazivnik, može se pisati

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{1+2\sqrt{5}+5} \quad \text{ili} \quad m = (1+\sqrt{5}):2$$

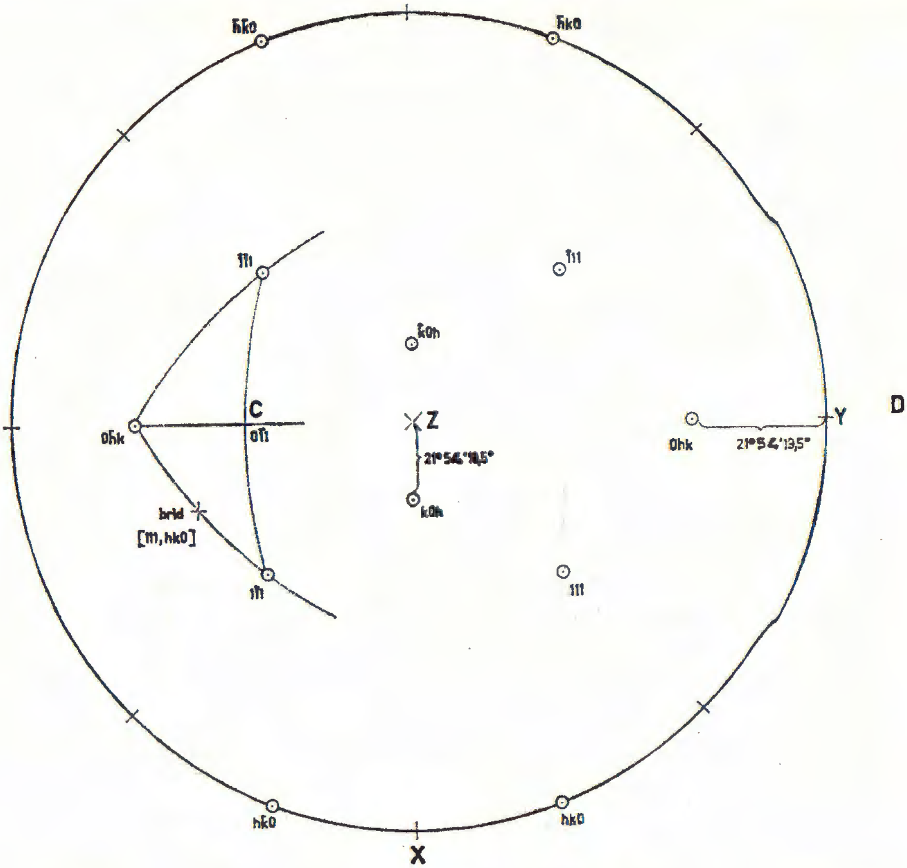
U lijepim pentagonskim dodekaedrima sa zlatnožutim sjajnim plohama javlja se često mineral pirit, FeS_2. Plohe tih piritnih pentagonskih dodekaedara nisu međutim nikad pravilni peterokuti sa svim jednakim stranicama. Naprotiv, jedna je stranica duža ili kraća nego ostale četiri jednake stranice. Koeficijent m je kod tih piritnih oblika uvijek razmjerno jednostavan racionalan broj.

VI. Pravilni ikozaedar također se ne može pojaviti sa svojim plohama na kristalima

Nakon pentagonskoga dodekaedra pokušat ćemo na sličan način razmotriti i okolnosti sa pravilnim ikozaedrom.

a) Izračunavanje plošnog kuta za ikozaedar

Razmatranja su utoliko kompliciranija, što pravilni ikozaedar ima 20 ploha, 12 uglova (rogljeva) i 30 bridova. Njegova stereografska projekcija (sl. 6) je radi toga kompliciranija nego stereografska projekcija dodekaedra. I u ovoj slici normale na



Sl. 6

pojedine plohe nalaze se u središtu malih kružića. Svaka je označena svojim kristalografskim znakom, koji se sastoji od tri slova odnosno od tri brojke. Znaci su dobro poznati svakom mineralogu ili kristalografu. Između svake dvije susjedne plohe ikozaedra odnosno između njihovih normala izlazi u sredini jedan brid ikozaedra. Tako upr. između plošnih normala $(0\bar{h}k)$ i $(1\bar{1}1)$ izlazi u samoj sredini brid, u kojem se sijeku plohe (111) i (hk0) (na sl. 6 označeno križićem kao brid [111, hk0]). Konstrukcija toga brida lako se izvrši u stereografskoj projekciji na način, koji je općenito poznat svakomu, tko se služi tom projekcijom.

Pokušajmo sad iz sl. 6 izvaditi sferni trokut, kojemu su vrhovi označeni točkama $(0\bar{h}k)$, zatim $(1\bar{1}1)$ te raspolovišnom točkom C između $(1\bar{1}1)$ i $(\bar{1}\bar{1}1)$ (sl. 7), koja predstavlja – kako je iz kristalografije poznato – normalu $(0\bar{1}1)$ na plohu rompskog dodekaedra. To je pravokutan sferni trokut sa pravim kutom kod C. U njemu je poznata stranica a=35° 15' 53" koja je jednaka polovici kuta među plohama oktaedra (70°31'46"). Uz to je poznat i kut *a*. Taj je kut – kako se lako može objasniti iz simetrijskih elemenata ikozaedra – jednak 60^0. Kroz normalu $(0\bar{h}k)$ idu naime tri ravnine simetrije, svaka kroz jedan vrh i kroz sredinu tom vrhu suprotne stranice istostraničnoga trokuta, kojim je predstavljena svaka ploha pravilnoga ikozaedra. U našem slučaju jedna od tih ravnina je ravnina kroz plohe $(0\bar{h}k)$ i $(0hk)$; druga ide kroz $(0\bar{h}k)$ i $(1\bar{1}1)$, a treća kroz $(0\bar{h}k)$ i $(\bar{1}\bar{1}1)$. Te tri ravnine sijeku se – isto kao i stranice istostraničnoga trokuta – pod kutovima od 60^0.

U spomenutom sfernom pravokutnom trokutu može se dakle izračunati svaki nepoznati njegov element, pa prema tomu i stranica c. Formula za to glasi:

$$\sin c = \frac{\sin a}{\sin \alpha}$$

Uvrste li se ovamo vrijednosti za a i α, dobiva se

$$c = (0\bar{h}k) : (1\bar{1}1) = 41^0 48' 39''$$

Pod tim se kutom sijeku normale na dvije susjedne plohe ikozaedra. Plohe same nagnute su jedna prema drugoj prema tomu pod kutom $138^0\ 11'21''$ (supelement od $41^0 48'39''$). Na taj način smo eto dobili kut, pod kojim se sijeku svake dvije susjedne plohe ikozaedra.

Polovica kuta

$$41^0 48'39'' \text{ odgovara (sl. 6) kutu } Z : (k0h) = 20^0 54'19{,}5''$$

jer Z predstavlja raspolovnicu između dviju susjednih ploha odnosno njihovih normala, $(k0h)$ i $(\bar{k}0h)$. U tom pogledu Z u potpunosti odgovara bridu [111, hk0] između plošnih normala $(0\bar{h}k)$ i $(1\bar{1}1)$.

Slično kao i kod pentagonskoga dodekaedra (sl. 4), tako će i ovdje kotangens toga kuta dati koeficijent m za ikozaedar.

b) Koeficijent m za pravilni ikozaedar je iracionalan broj

Da bismo to dokazali, moramo se iz proračunavanja kristalnih oblika teseralnoga sustava sjetiti na to, da se stranica $a = 35^0 15'53''$ u sl. 7, koja predstavlja polovicu kuta između normala na plohe oktaedra, izračunava po formuli

$$\mathrm{tg}\ 35^0\ 15'\ 53'' = \mathrm{tg}\ 45^0 . \sin 45^0 \text{ ili}$$

$$\mathrm{tg}\ 35^0\ 15'\ 53'' = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Odavle možemo izračunati

$$\sin 35^0\ 15'\ 53'' = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

a taj će nam podatak odmah trebati.

Pri izračunavanju kutnog razmaka $c = (0\bar{h}k) : (1\bar{1}1)$ (sl. 7) služili smo se naime formulom

$$\sin 41^0 48' 39'' = \frac{\sin 35^0 15' 53''}{\sin 60^0} \quad \text{ili}$$

$$\sin 41^0 48' 39'' = \frac{\sqrt{3}}{3} : \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \text{odnosno}$$

$$\sin 41^0 48' 39'' = \frac{2}{3}$$

Odatle ćemo odrediti sinus polovice toga kuta, tj. sin 20° 54' 19,5", prema poznatoj formuli

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)}$$

kako bismo nakon toga mogli odrediti cotg 20° 54' 19,5" = m.

Izlazi

$$\cos 41^0 48' 39'' = \frac{1}{3}\sqrt{5} \quad \text{i odatle}$$

$$\sin 20^0 54' 19{,}5'' = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\sqrt{5}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{5}}$$

te konačno

$$\text{cotg } 20^0 54' 19{,}5'' = (3 + \sqrt{5}) : 2$$

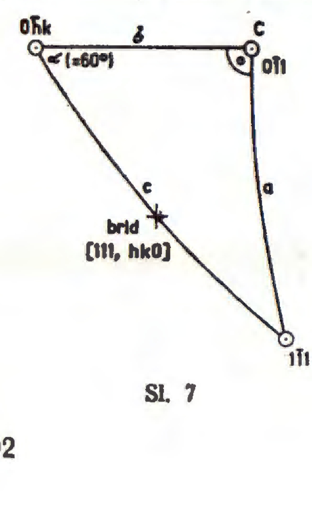
Da bi se dakle plohe takove forme pojavile na kristalima, to se ukazuje nemogućim, jer je koeficijent

$$m = (3 + \sqrt{5}) : 2$$

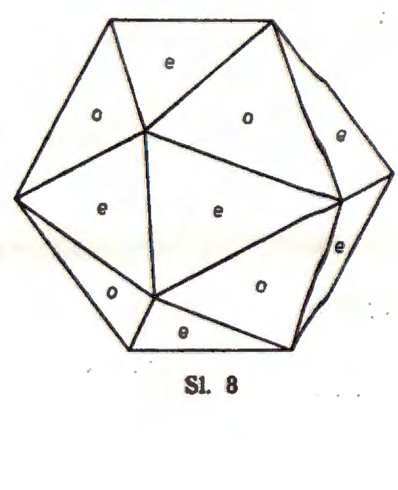
iracionalan. To se protivi zakonu o jednostavnim racionalnim koeficijentima.

c) Završne napomene

Među raznolikim lijepim kristalima pirita nalaze se nerijetko i kristali, koji svojim oblikom podsjećaju na ikozaedar. Usporedimo li takve kristale (sl. 8) sa sl. 1c, u kojoj je prikazan pravilni ikozaedar, opaža se značajna sličnost. Bitna je razlika me-



Sl. 7



Sl. 8

đutim u tom, što plohe tetrakisheksaedra {210}, koje na takvim kristalima pirita dolaze u kombinaciji sa plohama oktaedra {111}, nisu istostranični, nego istokračni trokuti. Samo plohe okaedra {111} su u toj kombinaciji predstavljene istostraničnim trokutima.

Sa kristalografskog stanovišta nemoguć je uostalom kristalni poliedar, koji bi se sastojao od 20 istovrsnih ploha. Pokušamo li naime primjenom simetrijskih elemenata, koji karakteriziraju 32 kristalne klase, iz položaja jedne plohe konstruirati skup svih istovrsnih ploha, tad ni u jednoj od tih klasa nećemo dobiti poliedar ili formu, koja bi se sastojala od 20 istovrsnih ploha. Razmotrimo li posebno odnose, koji postoje u holoedriji ili pentagonskoj hemiedriji teseralnoga sustava, tad se za holoedriju može reći, da u njoj postoje jednostavne forme, koje se sastoje od 48 (heksoktaedar), 24 (trisoktaedar, deltoidni ikozitetraedar i tetrakisheksaedar), 12 (rompski dodekaedar), 8 (oktaedar) ili 6 (heksaedar) istovrsnih ploha. Razmotri li se u pentagonskoj hemiedriji, u kojoj kristalizira pirit, mogućnost o tom, koji holoedri mogu nakon gubitka određenih simetrijskih elemenata u toj klasi dati nove poluforme, tada se lako može izvesti, da će to biti moguće samo kod heksoktaedra, iz kojega se mogu izvesti dva disdodekaedra, od kojih svaki ima 24 plohe te kod tetrakisheksaedra, koji daje dva pentagonska dodekaedra ,od kojih svaki ima 12 ploha.

Pravilni izokaedar kristalografski bi se morao shvatiti kao kombinacija pentagonskoga dodekaedra, za čije plohe bi koeficijent m morao biti – kako je izvedeno malo prije u razdjelu II,b – jednak $(3 + \sqrt{5}) : 2$, što je kristalografski nemoguće, i oktaedra. Ta kombinacija je dakle kristalografski nemoguća.

Od 5 pravilnih poliedara na kristalima se mogu pojaviti prema tomu samo tri, i to tetraedar, oktaedar i heksaedar. Koeficijenti za odsječke njihovih ploha na kristalografskim osima nisu u protivnosti prema zakonu o malim racionalnim ili cjelobrojnim koeficijentima.

Primljeno 30. 06. 1972

Mineraloško-petrografski muzej
Zagreb, Demetrova 1