Geol. vjesnik	Vol. 41	str. 255—265	Zagreb 1988.

UDK 556.3:532.5.5:517.51 *Izvorni znanstveni rad*

Analiza jednadžbi kontinuiteta i jednadžbi toka fluida kroz porozne sredine pod tlakom

Marija HEINRICH-MILETIĆ

Rudarsko-geološko-naftni fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Pierottijeva 6, YU — 41000 Zagreb

U ovom radu prikazana je analiza i klasifikacija različitih jednadžbi filtracije fluida pod tlakom uzimajući kao kriterij stišljivosti porozne sredine i fluida. Razmatrani su većim dijelom oni slučajevi strujanja fluida koji se mogu primijeniti na filtraciju podzemnih voda u zatvorenim slojevima.

The analysis and clasification of varios equations expressing the filtration of fluid under pressure, considering compressibility of porous media and fluid to be the criterion, are present in this paper. The main discussion concerns those cases of fluid flow, wich can be applied to the filtration of groundwater in artesian aquifers.

UVOD

Filtracija fluida pod tlakom je fenomen koji se često javlja u prirodi. Tečenje podzemne vode, tok nafte i plina u prirodnim ležištima su neki od primjera takvog tipa strujanja fluida. Stoga nije čudo da je to problematika obrađena s različitih aspekata u velikom broju znanstvenih i stručnih radova. Međutim malo je teoretskih radova u kojima su analizirani i klasificirani slučajevi filtracije uzimajući u obzir fizikalne karakteristike porozne sredine i fluida (Bear, 1972. 1979., Muskat, 1937., Scheideger, 1972.). Smatram da će biti od koristi sažeti tuđa i vlastita saznanja o toj problematici i prezentirati ih na pristupačan način većem broju korisnika, koji su zainteresirani za te informacije.

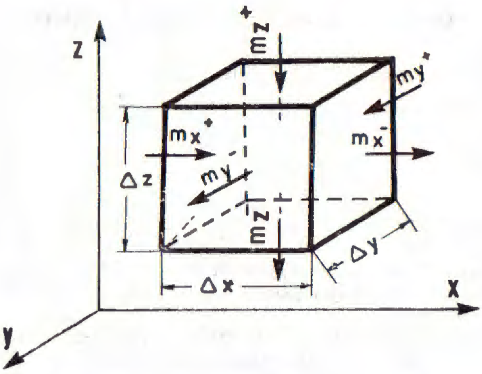
JEDNADŽBA KONTINUITETA

Promatra se porozna sredina potpuno saturirana fluidom. Područje filtracije je neuniformne debljine s horizontalnom donjom granicom, odnosno podinom.

Brzine toka su po pretpostavci relativno male, tako da se može zanemariti kinetička komponenta energije presjeka toka. Nadalje, s obzirom na horizontalnu podinu kojom je položena referentna ravnina, za specifičnu energiju presjeka toka može se sinonimno koristiti termin pijezometarska visina iznad podine i potencijal.

Za određivanje karakteristika toka fluida nužno je odrediti distribuciju tlaka ili pijezometarskih visina. Prvi korak u tom smislu je postaviti jednadžbu kontinuiteta, a tada koristeći odgovarajuće odnose između brzine filtracije i pijezometarske visine, te tlaka i pijezometarske visine izvesti jednadžbu toka. Ako se radi o podzemnim vodama tada je rješenje jednadžbe toka — distribucija potencijala osnovni pokazatelj stanja s aspekta kvantiteta i kvaliteta voda.

Na slici 1. prikazan je reprezentativni elementarni volumen (REV), koji je izdvojen iz porozne sredine saturirane fluidom pod tlakom.



Sl. 1. Masa koja ulazi odnosno izlazi u smjeru određene koordinatne osi.
Fig. 1. Inflow and outflow of flux in the direction of respective axis.

Masa fluida koja prolazi u jedinici vremena jedinicom površine, može se izraziti kao produkt gustoće fluida i brzine okomite na plohu kojom prolazi,

$$m = \varrho \cdot v \tag{1.}$$

gdje su:

ϱ — gustoća fluida (kg m^{-3})
v — brzina fluida (m s^{-1})

Promjena mase u jedinici vremena u smjeru osi x dana je kao razlika mase što je ušla i izašla u promatranom smjeru kroz plohe REV-a:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta m_x) = v_x\, \varrho\, \Delta y\, \Delta z - \left(\varrho v_x + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho v_x)\, \Delta x\right) \Delta y\, \Delta z$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta m_x) = -\frac{\partial}{\partial x}(\varrho v_x)\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z \tag{2.}$$

Analogno se mogu definirati promjene mase u smjeru osi y i z:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta m_y) = -\frac{\partial}{\partial y}(\varrho v_y)\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z \tag{3.}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta m_z) = -\frac{\partial}{\partial z}(\varrho v_z)\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z \tag{4.}$$

Ukupna promjena mase u jedinici vremena u REV-u jednaka je sumi promjena mase u smjeru koordinatnih osi:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta M) = -\left[\frac{\partial}{\partial x}(\varrho v_x) + \frac{\partial}{\partial_y}(\varrho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho v_z)\right]\Delta V \tag{5.}$$

U vektorskoj notaciji jednadžba (5.) je oblika:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta M) = -\operatorname{div}(\varrho \vec{v})\,\Delta V \tag{6.}$$

Općenito, vremenska promjena mase fluida sadržane u elementarnom volumenu porozne kompresibilne sredine, može se izraziti kao:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta M) = \frac{\partial}{\partial t}(\varrho\, n\, \Delta V) \tag{7.}$$

gdje je: n — poroznost saturirane sredine (1),

Ako u promatranoj sredini nema ni ponora ni izvora, tada je ukupna promjena mase u elementarnom volumenu jednaka nuli. To znači da se mogu izjednačiti mase izražene jednadžbom (6.) i jednadžbom (7.).

$$\operatorname{div}(\varrho \vec{v})\,\Delta V + \frac{\partial}{\partial t}(\varrho\, n\, \Delta V) = 0 \tag{8.}$$

Jednadžba (8.) nadalje se transformira uz pretpostavku da je elementarni volumen u cjelini približno stalan, to jest da se ne mijenja značajno ni po obliku ni po dimenzijama (B e a r, 1972.). Svojstvo stišljivosti sredine u tom slučaju opisano je samo promjenom poroznosti.
Uz navedene pretpostavke jednadžba (8.) može se pisati u obliku:

$$\operatorname{div}(\varrho \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial t}(\varrho n) = 0 \tag{9.}$$

Jednadžba (9.) j e j e d n a d ž b a k o n t i n u i t e t a za slučaj porozne sredine saturirane fluidom pod tlakom. Ako se radi o podzemnoj vodi, onda je to jednadžba kontinuiteta za zatvoren sloj.

Jednadžba kontinuiteta bit će razmatrana u daljnjem tekstu za specifične prirodne karakteristike sredine i fluida.

STIŠLJIVA POROZNA SREDINA I STIŠLJIV FLUID

Svojstvo stišljivosti porozne sredine bit će opisano kao što je već spomenuto, preko promjene poroznosti. Dakle, drugi član jednadžbe (9.) može se u slučaju stišljive sredine i stišljivog fluida, pisati u obliku:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho n) = \varrho\frac{\partial n}{\partial t} + n\frac{\partial \varrho}{\partial t} \tag{10.}$$

Promjena poroznosti može se općenito izrazit pomoću koeficijenta stišljivosti sredine i fluida i promjene gustoće fluida (S c h e i d e g e r, 1974):

$$\frac{\partial}{\partial t}(n\,\varrho) = \left(n + \frac{\beta_s}{\beta}\right)\frac{\partial \varrho}{\partial t} \tag{11.}$$

gdje su:

β_s — koeficijent stišljivosti sredine (Pa^{-1}),
β — koeficijent stišljivosti fluida (Pa^{-1}).

Gornja jednadžba vrijedi uz uvjet da se porozna sredina i fluid ponašaju kao elastično Hook-ovo tijelo pa su u tom slučaju njihova svojstva opisana slijedećim relacijama (M u s k a t, 1987.);

$$\frac{d\varrho}{dp} = \beta\varrho$$

$$\frac{dn}{dp} = \beta_s$$

Uvrštavanjem (11.) u jednadžbu (9.) slijedi:

$$\operatorname{div}(\varrho\,\vec{v}) + \left(n + \frac{\beta_s}{\beta}\right)\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 \tag{12.}$$

Dobivena je jednadžba kontinuiteta za slučaj stišljive porozne sredine i stišljivog fluida s članovima u kojima se javljaju i vremenske promjene gustoće fluida.

Taj oblik jednadžbe kontinuiteta se obično ne koristi u praktičnoj primjeni već se nastoji dobiti oblik u kojem se javljaju mjerljive veličine kao što su tlak ili pijezometarska visina. U tom smislu bit će izraženi članovi na desnoj strani jednadžbe (10.) kao funkcije tlaka odnosno pijezometarske visine.

Ako se pretpostavi, da se promjene poroznosti dešavaju samo u vertikalnom smjeru, tj. u smjeru osi z, promjene poroznosti i gustoće s tlakom mogu se relativno jednostavno izraziti pomoću koeficijenata koji definiraju svojstvo stišljivosti zrna i fluida. Spomenutu pretpostavku o vertikalnoj deformaciji elementarnog volumena prvi je uveo J a c o b (1950). Dobio je rezultate koji se u realnosti ne razlikuju od rezultata koji su dobiveni ako se deformacija REV-a tretira kao promjena poroznosti po svim prostornim koordinatama (B e a r i dr., 1968.) i ako se uzima u proračun i brzina čestica unutar elementarnog volumena (B i o t, 1956, D e W i e s t, 1966, C o o p e r, 1966.).

Prvi član desne strane jednadžbe (10.) može se izraziti uz navedenu pretpostavku u obliku (M i l e t i ć i H e i n r i c h - M i l e t i ć, 1982.):

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha(1 - n)\frac{\partial p}{\partial t} \tag{13.}$$

gdje je:

α — koeficijent vertikalne stišljivosti sredine (Pa^{-1}).

Nadalje, vremenska promjena gustoće može se izraziti u slučaju b a r o t r o p n o g fluida koristeći definiciju koeficijenta stišljivosti fluida:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \beta \varrho \frac{\partial p}{\partial t} \tag{14.}$$

Koristeći relacije (14.) i (13.) u jednadžbi (10.) slijedi:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varrho n) = \varrho \left[\alpha (1 - n) + n\beta \right] \frac{\partial p}{\partial t} \tag{15.}$$

Uvrštavanjem (15.) u jednadžbu (9.) slijedi:

$$\operatorname{div} (\varrho \vec{v}) + \varrho \left[\alpha (1 - n) + n\beta \right] \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \tag{16.}$$

U gornju relaciju može se uvesti simbol za koeficijent specifičnog uskladištenja (Sp) koji se odnosi na promjenu tlaka, definiran prema (B e a r, 1979.):

$$Sp \equiv \varrho \left[\alpha (1 - n) + n\beta \right] \tag{17.}$$

Koeficijent specifičnog uskladištenja Sp je na ovom mjestu uveden kao karakteristika porozne sredine bez odgovarajućeg izvoda. U radovima B e a r (1972) M i l e t i ć i H e i n r i c h - M i l e t i ć (1982) može se naći opširan opis izvoda te veličine uz fizikalnu interpretaciju svakog pojedinog člana koji čine taj koeficijent. U navedenim radovima dani su i komentari na pojedine pristupe kojima se definira taj koeficijent elastičnosti porozne sredine.

Uvrštavanjem simbola Sp u jednadžbu (16.) slijedi:

$$\operatorname{div} (\varrho \vec{v}) + Sp \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \tag{18.}$$

Jednadžba (18.) predstavlja jednadžbu kontinuiteta u kojoj su promjena gustoće i vektora brzine funkcije promjene tlaka. Gornja jednadžba može se nadalje transformirati u oblik gdje su vremenske promjene tlaka izražene vremenskim promjenama pijezometarskih visina. Vrsta relacija koja povezuje te dvije veličine ovisi o karakteristikama fluida.

B a r o t r o p a n f l u i d

Veza između tlaka i pijezometarske visine u slučaju barotropnog fluida kada vrijedi $\varrho = \varrho(p)$ za izotermne uvjete, dana je prema H u b e r t u (1940) relacijom:

$$\varphi = \frac{1}{g} \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varrho(p)} \tag{19.}$$

gdje je: φ — pijezometarska visina, potencijalna energija jedinice težine barotropnog fluida (m).

Dakle, vremenska promjena tlaka kao funkcija promjene pijezometarske visine je dana kao:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varrho g \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{20.}$$

Uvrštavajući (20.) u jednadžbu (16.) slijedi:

$$\varrho \operatorname{div} \vec{v} + \varrho S\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{21.}$$

gdje je:

$$S\varphi \equiv \varrho g \left[\alpha (1 - n) + n\beta\right] \tag{22.}$$

a veličina: $S\varphi$ — koeficijent specifičnog uskladištenja (m^{-1}).

Koeficijent $S\varphi$ odnosi se na promjenu pijezometarskog nivoa, a definira masu fluida koju otpušta (ili prima) jedinični volumen porozne sredine kao posljedicu jediničnog pada (ili rasta) pijezometarske visine. Analogno jednadžbi (18.) i jednadžba (21.) predstavlja jednadžbu kontinuiteta, samo što je u ovom slučaju veličina div $\vec{v}$ izražena visinom pijezometarskog nivoa.

STIŠLJIVA POROZNA SREDINA I NESTIŠLJIV FLUID

U slučaju stišljive porozne sredine i nestišljivog fluida, jednadžba (10.) reducira se na oblik:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho n) = \varrho \frac{\partial n}{\partial t} \tag{23.}$$

Zamijenivši desnu stranu (23.) s izrazom (13.), jednadžba kontinuiteta (9.) se može pisati u obliku:

$$\operatorname{div}(\varrho \vec{v}) + \varrho \alpha (1 - n) \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \tag{24.}$$

Dobivena je jednadžba kontinuiteta za stišljivu poroznu sredinu i nestišljiv fluid.

Za homogen izotropan nestišljivi fluid može se tlak izraziti pomoću pijezometarske visine:

$$p = \varrho g h \tag{25.}$$

gdje je: h — pijezometarska visina nestišljivog fluida (m).

Jednadžba (24.) uz primjenu (25.) prelazi u oblik:

$$\operatorname{div} \vec{v} + \varrho g \alpha (1 - n) \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \tag{26.}$$

Dobivena je jednadžba kontinuiteta za slučaj stišljive porozne sredine i homogenog izotropnog nestišljivog fluida.

NESTIŠLJIVA POROZNA SREDINA I STIŠLJIV FLUID

U slučaju nestišljive sredine i stišljivog fluida jednadžba kontinuiteta dobija se iz jednadžbe (9.) uz uvjet da je n = const.:

$$\operatorname{div}(\varrho\vec{v}) + n\frac{\partial\varrho}{\partial t} = 0 \qquad (27.)$$

Za homogen izotropan stišljivi fluid $\frac{\partial\varrho}{\partial s} = 0$ gdje je $s = s(x,y,z)$, jednadžba kontinuiteta je oblika:

$$\varrho \operatorname{div}\vec{v} + n\frac{\partial\varrho}{\partial t} = 0 \qquad (28.)$$

Barotropan fluid

Za barotropan fluid vrijedi relacija (14.), pa nakon uvrštavanja u jednadžbu (28.) slijedi:

$$\operatorname{div}\vec{v} + n\beta\frac{\partial p}{\partial t} = 0 \qquad (29.)$$

Veza između tlaka i pijezometarske visine u slučaju barotropnog fluida definirana je relacijom (19.) odnosno (20.). Nakon uvrštavanja izraza (20.) u (29.) slijedi:

$$\operatorname{div}\vec{v} + n\beta\varrho g\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \qquad (30.)$$

Dobivena je jednadžba kontinuiteta za slučaj nestišljive porozne sredine i barotropnog fluida.

NESTIŠLJIVA POROZNA SREDINA I NESTIŠLJIV FLUID

Za nestišljivu poroznu sredinu i nestišljiv fluid desna strana jednadžbe (9.) je jednaka nuli, pa je jednadžba kontinuiteta oblika:

$$\operatorname{div}(\varrho\vec{v}) = 0 \qquad (31.)$$

Dobivena je jednadžba kontinuiteta kojom je opisan stacionaran tok koji je posljedica nestišljivosti porozne sredine i nestišljivosti fluida.

Za homogeni izotropan fluid jednadžba kontinuiteta je oblika:

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0 \qquad (32.)$$

Kako se podzemna voda u plićim naslagama u većini slučajeva tretira kao homogeni izotropan nestišljiv fluid, relacija (32.) se često koristi u opisu stacionarnog toka podzemne vode.

JEDNADŽBE TOKA

Jednadžba toka fluida u poroznoj sredini dobije se iz jednadžbe kontinuiteta primjenom Darcyeva zakona filtracije.

U nastavku bit će izvedene jednadžbe toka za slučaj stišljive porozne sredine i stišljivog fluida, stišljive porozne sredine i »praktički« nestišljivog fluida, te nestišljive porozne sredine i nestišljivog fluida.

Navedene kombinacije karakteristika porozne sredine i fluida se najčešće sreću u praksi pa su stoga ti slučajevi toka izabrani za daljnju diskusiju.

Jednadžba toka za stišljivu sredinu i stišljiv fluid

Poopćeni Darcyev zakon za brzinu toka barotropnog fluida u nehomogenoj anizotropnoj sredini može se izraziti relacijom (Hubert, 1940.):

$$\vec{v} = -k \frac{\varrho g}{\mu} \operatorname{grad} \varphi \tag{33.}$$

gdje su: v — brzina fluida (ms^{-1})
k — tenzor filtracije, čije se osnovne komponente podudaraju sa smjerovima kordinantnih osi (ms^{-1})
μ — koeficijent dinamičke viskoznosti ($kg\ m^{-2}\ s^{-2}$)
ϱ — gustoća fluida
φ — potencijal fluida definiran relacijom (19.).

Jednadžba toka dobije se uvrštavanjem (33.) u jednadžbu kontinuiteta (21):

$$\frac{\varrho g}{\mu} \operatorname{div} (k \operatorname{grad} \varphi) = S\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{34.}$$

Jednadžba (34.) opisuje nestacionaran tok barotropnog fluida u nehomogenoj anizotropnoj sredini. Nestacionaran tok je posljedica stišljivosti porozne sredine i stišljivosti fluida.

Za homogenu izotropnu sredinu ($k = \text{const}$), jednadžba toka je oblika:

$$\varrho g \frac{k}{\mu} \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = S\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{35.}$$

Gornja jednadžba može se pisati i u obliku:

$$\Delta \varphi = \frac{S\varphi}{kg\varrho\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{36.}$$

gdje je: Δ — Laplaceov operator definiran kao:

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Jednadžba toka za stišljivu sredinu i »praktički« nestišljiv fluid

Termin »praktički« nestišljiv fluid koristit će se za homogen izotropan fluid koji pokazuje svojstvo stišljivosti u toj mjeri da je pripadni koeficijent stišljivosti $\beta \neq 0$. No za određivanje brzine toka tog fluida može se primijeniti Darcyev zakon filtracije za nestišljiv fluid. Nadalje, veza između tlaka i pijezometarske visine u slučaju ovog fluida također se može definirati relacijom koja općenito vrijedi za nestišljiv fluid. Darcyev zakon se za tok nestišljivog fluida može pisati u obliku:

$$\vec{v} = \mathrm{K\ grad\ h} \tag{41.}$$

gdje su: K — tenzor hidrauličke provodljivosti čije osnovne komponente se podudaraju sa smjerovima koordinatnih osi (ms^{-1}),

h — potencijal nestišljivog fluida definiran relacijom (25.)

Jednadžba toka u slučaju stišljive porozne sredine i »praktički« nestišljivog fluida može se izvesti iz jednadžbe (16.) u koju se uvrštava izraz za tlak definiran jednadžbom (25.) i izraz za brzinu definiran relacijom (41.).

Jednadžba toka će biti oblika:

$$\mathrm{div}\,(\mathrm{K\ grad\ h}) = \varrho g\,[\alpha\,(1 - n) + n\beta]\,\frac{\partial h}{\partial t} \tag{42.}$$

Gornja jednadžba opisuje trodimenzionalan (3D) nestacionaran tok »praktički« nestišljivog fluida u nehomogenoj anizotropnoj sredini, koja je stišljiva.

Za slučaj homogene izotropne sredine, gornja jednadžba može se pisati u obliku:

$$\mathrm{div\ grad\ h} = \frac{S\varphi}{K}\,\frac{\partial h}{\partial t} \tag{43.}$$

Jednadžba toka za nestišljivu sredinu i nestišljiv fluid

Za tok homogenog izotropnog nestišljivog fluida u nestišljivoj sredini vrijedi jednadžba kontinuiteta (31.).

Uvrstivši u jednadžbu (31.) izraz za brzinu (41.) slijedi:

$$\mathrm{div\ (K\ grad\ h)} = 0 \tag{44.}$$

Gornja jednadžba opisuje općenito 3D stacionaran tok nestišljivog fluida u nestišljivoj, nehomogenoj, anizotropnoj poroznoj sredini.

Za homogenu izotropnu sredinu, jednadžba toka je oblika:

$$\mathrm{div\ grad\ h} = 0 \tag{45.}$$

Stacionaran tok opisan jednadžbom (45.) je posljedica nestišljivosti porozne sredine i nestišljivosti fluida.

APROKSIMACIJA TOKA U ZATVORENOM VODONOSNOM SLOJU

Tok u zatvorenom vodonosnom sloju u većini slučajeva može se tretirati kao dvodimenzionalan i horizontalan. Pogreške koje se unose ovim aproksimacijama ne predstavljaju prepreku u primjeni gornjih pretpostavki u rješavanju praktičnih problema vezanih za zatvorene slojeve. To najbolje pokazuje analiza veličine greške koja se javlja zamjenom 3D s 2D u slučaju zatvorenih vodonosnih slojeva (B e a r, 1972).

Aproksimacija 2D toka može se uvesti ako su zadovoljeni slijedeći uvjeti:

— dužina prostiranja sloja mnogo je veća od debljine sloja,
— sloj je približno konstantne debljine,
— kada se mogu zanemariti vertikalne komponente brzine toka.

Nadalje je potrebno, u cilju dobivanja što jednostavnijeg oblika jednadžbi toka, uvesti pojam »praktički« nestišljiv fluid. Podzemna voda tretira se kao homogen izotropan fluid, čija se svojstva stišljivosti manifestiraju samo kao funkcija vremenske koordinate.

Za fluid s ovako definiranim karakteristikama stišljivosti može se primijeniti Darcyev zakon za nestišljiv fluid i da pri tom vrijedi relacija (25.) kojom je definiran odnos tlaka i pijezometarske visine.

Uvrštavanjem izraza (25.) i (41.) u jednadžbu kontinuiteta za slučaj 2D toka, slijedi jednadžba toka (M i l e t i ć i H e i n r i c h - M i l e t i ć, 1982.):

$$\mathrm{div}\,(K\,\mathrm{grad}\,h) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \qquad (46.)$$

gdje su: $T = K \cdot b$
$S = S_s \cdot b$

a veličine znače: S — koeficijent uskladištenja (1)
T — koeficijent transmisivnosti (m^2s^{-1})
b — debljina sloja (m).

Koeficijenti S i T su parametri porozne sredine, kojima su opisane karakteristike zatvorenog horizontalnog vodonosnog sloja uniformne debljine i to u slučaju 2D toka fluida.

Sve navedene jednadžbe toka u ovom dijelu poglavlja opisuju nestacionaran tok, koji je primarno posljedica elastičnog ponašanja porozne sredine, dok je podzemna voda tretirana kao »praktički« nestišljiv fluid (B e a r i d r., 1968., B e a r, 1979.).

ZAKLJUČAK

U ovom radu izvršena je analiza i klasifikacija jednadžbi kontinuiteta i jednadžbi toka za različite slučajeve filtracije fluida pod tlakom. Obuhvaćeni su uglavnom slučajevi filtracije koji se susreću u istraživanju tečenja podzemnih voda. Kao kriterij klasifikacije uzete su fizikalne karakteristike fluida i porozne sredine s time da nije razmatran utjecaj temperature na stanje fluida. Dobivene su jednadžbe kontinuiteta i jednadžbe toka za sve kombinacije stišljive i nestišljive porozne sredine, te stišljivog i nestišljivog fluida. Analizirana je i jednadžba kojom se aproksimativno opisuje tok u zatvorenom sloju, u slučaju da se voda tretira kao »praktički« nestišljiv fluid a porozna sredina je stišljiva.

Jednadžbe navedene pod brojevima (24.), (26.) i (30.) nisam pronašla u tom obliku u konzultiranoj literaturi od koje su citirane samo najvažnije publikacije.

Primljeno: 10. 12. 1987.

LITERATURA

Bear, J. (1972): »Dinamics of fluids in porous media«, Elsevier, 764 str., New York.

Bear, J. (1979): »Hidraulics of groundwater«, Mc Graw-Hill, 569 str., New York.

Bear, J., D. Zaslavsky & S. Irmy (1968): »Physical principles of water percolation and seepage«, UNESCO, 465 str., Paris.

Biot, M. A. (1956): »Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid«, *J. Appl. Phys. 27, (5)*, 459—467.

Cooper, H. H., Jr. (1966): »The equation of groundwater flow in fixed and deforming coordinates«, *J. of Geoph. Res. 71, (4)*, 1118—1122, Washington.

De Wiest, R. J. M. (1966): »On the storage coefficient and the equations of groundwater flow«, *J. of Geoph. Res. 71, (20)*, 4785—4790, Washington.

Hubert, K. C. (1940): »The theory of groundwater motion«, *J. of Geoph. Res. 48*, 785—944, Washington.

Jacob, C. E. (1940): »On the flow of water in elastic artesian aüuifer«, *Am. Geoph. Union, 2*, 574—588, Washington.

Jacob, C. E. (1950): »Flow of groundwater«, In engineering hidraulics, ed. H. Rouse. Chap. 5, J. Wiley, 321—386 str., New York.

Miletić, P. & M. Heinrich-Miletić (1982): »Uvod u kvantitativnu hidrogeologiju«, I dio, 220 str., Varaždin.

Muskat, M. (1937): »The flow of homogeneus fluids through porous media«, Mc Graw-Hill, 763 str., New York.

Scheidiger, A. E. (1974): »The physics of flow through porous media«, University of Toronto Press, 353 str., Toronto.

Analysis of Continuity and flow Equations for Fluid in porous media under Pressure

M. Heinrich-Miletić

The equation of the continuity as well as of the equations of flow have been presented for various combinations of compressibility of fluid and porous media. The equations concern the saturated flow under pressure. The following combinations are considered: compressible porous media and compressible fluid, compressible porous media uncompressible fluid, uncompressible porous media, compressible fluid and uncompressible porous media and uncompressible fluid.

The continuity and flow equations for practically uncompressible fluid have been presented too. Each combination of the above mentioned physical properties of porous media and fluid have been presented symbolically (equations under Nos.: 18., 21., 24., 27., 31., 34., 42., 45., 49.).

To the best knowledge of the author, in available literature there is no such a complete presentation of various combinations of physical properties of porous media and fluid. The equations Nos 24., 26., and 30., have not been found expressed in the presented form.