Geol. vjesnik	Vol. 41	str. 267—280	Zagreb 1988.

UDK 556.013:532.5

Izvorni znanstveni rad

Numerički model inženjerskih hidrogeoloških sistema

I Konačne diferencije

Marija HEINRICH-MILETIĆ

Rudarsko-geološko-naftni fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Pierottijeva 6, YU — 41000 Zagreb

Ovaj rad posvećen je opisu specifičnih prirodnih procesa i inženjerskih aktivnosti u numeričkim modelima hidrogeoloških sistema. To su fenomeni: infiltracije, međuslojnog procjeđivanja, evapotranspiracije, efekt zakašnjelog otpuštanja vode kod otvorenih slojeva, te inženjerske aktivnosti kao što su crpljenje i umjetna infiltracija uz opis popratnih efekata. U numeričkim modelima korištena je metoda konačnih diferencija.

This work presents specific natural processes and engineering activities in numerical models of hydrogeologic systems. These are: the phenomena of infiltration, leakage, evapotranspiration, the effect of delayed yield, and engineering activities as pumping and artifitial infiltration. There is also a description of accompanying effects. In numerical models the of finite differences is used.

UVOD

Proces kreiranja numeričkog modela hidrogeološkog sistema može se podijeliti u četiri etape (Heinrich-Miletić, 1980):

1) izrada pripadnog hidrogeološkog modela danog sistema,
2) opis karakteristika i ograničenja prostornog modela matematičkom simbolikom,
3) izbor odgovarajućeg matematičkog modela i
4) kreiranje odgovarajućeg numeričkog modela, kojim je opisan hidrogeološki model s pridruženim ograničenjima okoliša.

Shematizacija hidrogeološkog modela

Kod shematizacije hidrogeoloških modela koji predstavljaju bazu numeričkih modela obrađenih u daljem tekstu, razmatrani su slučajevi ograničenih i neograničenih vodonosnih slojeva. S obzirom na granice hidrogeoloških sistema u razrezu razlikuju se tri tipa modela (modificirano prema Kruseman & Ridder, 1970):

— model zatvorenog vodonosnog sloja,
— model poluzatvorenog vodonosnog sloja i
— model otvorenog vodonosnog sloja.

Karakteristike prostornog modela

Uz hidrogeološki model koji opisuje fizikalnu reakciju podzemlja na inženjerske intervencije, potrebno je opisati uvjete nametnute iz okoliša koji utječu na novo stanje u hidrogeološkom sistemu i obratno. Utjecaj okoliša u širem smislu poimanja opisan je takozvanim prostornim modelom. Pod prostornim modelom podrazumijeva se u ovom slučaju najšira primjena tog naziva, tj. uvjeti korištenja i socijalno-ekonomsko-pravno uređenje prostora u kojem živi čovjek.

Uvjeti i utjecaji prostornog modela moraju biti opisani formalno na način koji je prikladan za hidrogeološki model. Parametri prostornog modela izražavaju se često kao ograničenja na razinu podzemne vode ili njen hidraulički gradijent (Young & Bredehoeft, 1972, Schwarz, 1976, Wanakule i dr., 1985).

Izbor odgovarajućeg modela

Matematički model inženjerskog hidrogeološkog sistema sastoji se od odgovarajućih diferencijalnih jednadžbi, početnih i graničnih uvjeta toka podzemne vode te matematičkog opisa ograničenja koja nameće okoliš.

Metoda kojom se određuju rješenja matematičkog modela ovisi o karakteristikama hidrogeološkog modela i cilja (Miletić i Heinrich-Miletić, 1986). Postupak kreiranja i primjene modela koji se baziraju na metodi konačnih diferencija opisan je u nastavku.

Kreiranje numeričkih modela

Diskretizacija područja i postupak definiranja granica numeričkog modela je prvi korak a ujedno jedan od najvažnijih postupaka kreiranja numeričkog modela. Način diskretizacije uvjetovan je hidrogeološkim modelom i njegovim granicama, zatim postavljenim ograničenjima i numeričkom metodom koja se koristi.

Ako se koristi metoda konačnih diferencija mreža čvorova je ortogonalna. Pri izboru mreže čvorova bitno je odabrati takav položaj čvorova, da je mreža progušćena na području naglašenog nehomogeniteta ili na području gdje je potreban veliki broj informacija o simuliranom sistemu.

Ilustracija jednog od mogućih prikaza bočnih granica, koristivši pri tome »centraliziranu« mrežu čvorova, prikazana je u radu Miletić i Heinrich-Miletić (1982).

Slijedeći korak je definiranje diskretnog prikaza diferencijalnih jednadžbi kojima je opisan tok podzemne vode. Postupak prevođenja diferencijalne jednadžbe u sistem jednadžbi konačnih diferencija opisan je u mnoštvu publikacija i to onih koje se odnose na teoretsku osnovu te numeričke metode, a isto tako onih kojima je opisana njena praktična primjena u dinamici podzemnih voda.

Na ovom mjestu bit će prikazani samo gotovi izrazi za diskretni prikaz jednadžbe kojom je opisan dvodimenzionalan nestacionaran tok u zatvorenom sloju ako je sredina nehomogena — anizotropna.

Taj slučaj toka je izabran za ilustraciju prikaza različitih inženjerskih i prirodnih procesa, jer odgovarajuća jednadžba toka može poslužiti osnovom za prikaz protjecanja i u slučajevima poluzatvorenog i otvorenog vodonosnog sloja.

Diskretni prikaz navedene jednadžbe ima ovaj oblik:

$$[\Delta_x (T_x \Delta_x h) + \Delta_y (T_y \Delta_y h)]_{ij} = S_{ij} \Delta_t h_{ij} + W_{ij} \qquad (1)$$

$$(i \Delta x, j \Delta y) \in R_1$$

gdje su:

Δ_x, Δ_y — operatori konačnih diferencija kojima su aproksimirane prostorne derivacije,
Δ_t — operator konačnih diferencija kojim je aproksimirana vremenska derivacija,
T_x, T_y — komponente tenzora transmisivnosti u x odnosno y smjeru ($L^2 T^{-1}$),
h — visina pijezometarske razine (potecijal) podzemne vode, (L),
S — koeficijent uskladištenja, (1),
W — opisuje ulaz odnosno izlaz vode po jedinici površine i jedinici vremena, ($L T^{-1}$),
R_1 — skup diskretnih točaka (i Δx, j Δy) u skupu R.

Jednadžba (1) odnosi se na čvor (i, j) uz napomenu da nije specificiran način prikaza prostornih derivacija, a niti je specificiran vremenski nivo.

Ako se za vremensku derivaciju koristi implicitna shema, a za prostorne derivacije centralne diferencije, jednadžba (1) se može pisati u obliku (H e i n r i c h - M i l e t i ć, 1982):

$$a_{ij} h_{i+1,jk} + b_{ij} h_{i-1,jk} + c_{ij} h_{ij+1,k} + d_{ij} h_{ij-1,k} + e_{ij} h_{ijk} = f_{ijk-1} \qquad (2)$$

$$i = 1, 2, \ldots, M; \quad j = 1, 2, \ldots, N$$

gdje oznake znače:

k — indeks vremenskog nivoa,
M, N — broj redaka, odnosno broj stupaca

$$a_{ij} = \frac{T_x\left(i + \frac{1}{2}, j\right)}{\Delta x_i \, \Delta x_i + \frac{1}{2}}$$

$$b_{ij} = \frac{T_x\left(i - \frac{1}{2}, j\right)}{\Delta x_i \, \Delta x_i - \frac{1}{2}}$$

$$c_{ij} = \frac{T_y\left(i,\ j + \frac{1}{2}\right)}{\Delta y_j\ \Delta y_j + \frac{1}{2}}$$

$$d_{ij} = \frac{T_y\left(i,\ j - \frac{1}{2}\right)}{\Delta y_j\ \Delta y_j - \frac{1}{2}}$$

$$e_{ij} = -\left(a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} + d_{ij} + \frac{S_{ij}}{\Delta t}\right)$$

$$f_{ijk-1} = -\frac{S_{ij}}{\Delta t} h_{ijk-1} + W_{ijk} \qquad (3)$$

Koeficijenti a, b, c, d, e i f ovise o tipu modela, načinu superponiranja mreže čvorova i načinu izražavanja vrijednosti parametara porozne sredine u čvorovima (Prickett & Lonnquist, 1971, Pinder & Bredehoeft, 1968, Aziz & Settari, 1979).

Uz definiranu mrežu čvorova i definirane vrijednosti parametara u čvorovima, koeficijenti navedeni pod (3), poprimit će oblike koji odgovaraju određenom tipu hidrogeološkog modela, odnosno inženjerskoj aktivnosti u sistemu.

OPIS INŽENJERSKIH AKTIVNOSTI I PRIRODNIH PROCESA U NUMERIČKIM MODELIMA

Crpljenje i slične aktivnosti

Inženjerski zahvati kao što su uzimanje vode iz podzemlja i obrnuto, najvažnije su aktivnosti u hidrogeološkom sistemu. Odgovarajući opis tih aktivnosti u numeričkom modelu može se dobiti pridruživanjem slijedećeg izraza članu W_{ijk} iz jednadžbe (2):

$$W_{ijk} = \frac{Q_{ijk}}{\Delta x_i\ \Delta x_j} \qquad (4)$$

gdje je:

Q — količina crpljenja iz bunara u jedinici vremena ($L^3\ T^{-1}$) ako je, $Q > 0$ ili količina infiltracije u bunar, ako je $Q < 0$.

Veličina Q može biti funkcija vremena i potencijala. No najčešće je slučaj da su crpljenje i infiltracija konstantne veličine, ili su dane kao poznate funkcije vremena, tako da je vrijednost člana W određena kada se provodi rješavanje modela za određeni vremenski korak. Na isti ili sličan način opisuju se i sve druge slične inženjerske aktivnosti u sistemu, kao što su posljedice provedbe irigacije, drenaže ili odvodnjavanje građevinskih jama i slično.

Međuslojno procjeđivanje

Za idealizirani poluzatvoren vodonosni sloj količinu međusobnog procjeđivanja definirao je Hantush (1964) kao funkciju razlike potencijala u glavnom i polupropusnom sloju i hidrogeoloških parametara polupropusnog sloja. Pri tome razlika potencijala može biti umjetno izazvana (primjerice kod crpljenja) ili prirodna (međuslojno »pretakanje« vode).

Pri svojoj definiciji Hantush je pretpostavio da je visina pijezometarske razine u gornjem sloju stalna, dok u donjem može biti stalna (stacionaran tok) ili funkcija vremena (nestacionaran tok). Razlika pijezometarskih visina ima za posljedicu flux (utok), koji za nestacionaran slučaj, koji Bredehoeft i Pinder (1970), zatim Trescott i dr. (1977), u aproksimaciji konačnih diferencijacija opisuju na slijedeći način:

$$\Delta q_z(i, j, k) = \frac{K'_{ij}}{b'_{ij}}(\hat{H}_{ij} - h_{ijo}) + R_{ijk}\frac{K'_{ij}}{b'_{ij}}(\hat{H}_{ijo} - h_{ijk}) \qquad (5)$$

gdje oznake imaju značenja:

$\hat{H}$ — visina vode gornjeg sloja, (L),

h — visina vode u glavnom vodonosnom sloju, (L),

K' — koeficijent hidrauličke provodljivosti polupropusnog sloja, (LT^{-1}),

b' — debljina polupropusnog sloja, (L),

S'_s — koeficijent specifičnog uskladištenja polupropusnog sloja, (L^{-1}),

t — vrijeme proteklo od početka crpljenja, (T),

R — koeficijent međuslojnog procjeđivanja, (l),

$\Delta q_z > 0$ — u slučaju dotoka vode kroz polupropusni sloj u glavni sloj,

$\Delta q_z < 0$ — u slučaju otjecanja vode iz glavnog sloja.

Prvi član desne strane jednadžbe (5) opisuje dotok u glavni sloj kao funkciju razlike potencijala gornjeg i donjeg sloja u početno vrijeme.

Drugi član opisuje količinu procjeđivanja u glavni sloj, koja je jednaka sumi fluxa (utoka) uslijed promjene gradijenta i fluxa koji je posljedica prijelaznog toka u polupropusnom sloju.

Vrijednost koeficijenta međuslojnog procjeđivanja (R) ovisi o odnosu veličina parametara polupropusne sredine i vremena promatranja pojave (t). U tom smislu definiran je bezdimenzionalan faktor čija vrijednost predstavlja kriterij određivanja izraza za koeficijent međuslojnog procjeđivanja:

$$r = \frac{K'_{ij}\ t}{b'^2_{ij}\ S_s(i, j)}$$

Za vrijednost faktora $r > 3 \cdot 10^{-3}$, koeficijent R je definiran izrazom:

$$R = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2\pi r}{3}\right)$$

Ako je faktor $r < 3 \cdot 10^{-3}$, tada je koeficijent R definiran kao:

$$R = \left(\frac{3}{\pi r}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} - \frac{3 n^2}{r}\right)$$

U slučaju nestacionarnog procjeđivanja kroz polupropustan sloj koeficijenti e_{ij} i $f_{ij,k-1}$ mogu biti izraženi u ovom obliku:

$$e_{ij} = -\left(a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} + d_{ij} + \frac{S_{ij}}{\Delta t} + R_{ijk} \frac{K'_{ij}}{b'_{ij}}\right)$$

$$f_{ijk-1} = -\frac{S_{ij}}{\Delta t} h_{ijk-1} + W_{ijk} + \frac{K'_{ij}}{b'_{ij}} (\hat{H}_{ij} - h_{ijo}) + R_{ijk} \frac{K'_{ij}}{b'_{ij}} \hat{H}_{ijo} \qquad (6)$$

Količina procjeđivanja kroz polupropustan sloj, ako se radi o stacionarnom toku, može biti opisana (H a n t u s h, 1964):

$$\Delta q_z (i, j, k) = \frac{1}{\beta_{ij}} \left((\hat{H}_{ijo} - h_{ijo}) \right) \qquad (7)$$

gdje je:

$\frac{1}{\beta}$ — koeficijent procjeđivanja (T^{-1}).

Koeficijent procjeđivanja $\frac{1}{\beta}$ može se izraziti kao:

$$\frac{1}{\beta_{ij}} = \frac{K'_{ij}}{b'_{ij}}$$

Uzimajući u obzir jednadžbu (7) uz izraz za β, koeficijenti e_{ij} i f_{ijk-1} dani su relacijama:

$$e_{ij} = -\left(a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} + d_{ij} + \frac{S_{ij}}{\Delta t} \frac{1}{\beta_{ij}}\right)$$

$$f_{ijk-1} = -\frac{S_{ij}}{\Delta t} h_{ijk-1} + W_{ijk} + \frac{\hat{H}_{ijo}}{\beta_{ij}} \qquad (8)$$

gdje su:

W — član kojim je opisana općenito inženjerska aktivnost,
S — koeficijent uskladištenja glavnog sloja (1).

Osobitosti otvorenog vodonosnog sloja

Za aproksimativni opis toka u otvorenom sloju koristi se kao osnova jednadžba dvodimenzionalnog toka za zatvoreni sloj:

$$\frac{1}{\Delta x_i} \left[T_x \left(i + \frac{1}{2}, j\right) \frac{h_{i+1,j} - h_{ij}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} - T_x \left(i - \frac{1}{2}, j\right) \frac{h_{ij} - h_{i-1,j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right]_k +$$

$$+\frac{1}{\Delta y_j}\left[T_y\left(i, j+\frac{1}{2}\right)\frac{h_{ij+1}-h_{ij}}{\Delta y_{j+\frac{1}{2}}}-T_y\left(i, j-\frac{1}{2}\right)\frac{h_{ij}-h_{ij-1}}{\Delta y_{j-\frac{1}{2}}}\right]_k=$$

$$=Sy\,\frac{h_{ijk}-h_{ijk-1}}{\Delta t}+W_{ijk} \tag{9}$$

Koeficijent transmisivnosti, a definiran je kao produkt koeficijenta hidrauličke provodljivosti i debljine saturiranog dijela sloja, mijenja se u tome slučaju u svakom iteracijskom koraku:

$$\overset{(n)}{T_x}(i, j)=K_x(i, j)\cdot \overset{(n-1)}{m_s}(i, j) \tag{10}$$

gdje oznake znače:

K_x, K_y — komponente tenzora hidrauličke provodljivosti u x, odnosno y smjeru, (LT^{-1}),
m_s — debljina saturiranog dijela vodonosnog sloja, (L),
S_y — koeficijent specifičnog otpuštanja, (1),
n — broj iteracijskog koraka.

Korištenje jednadžbe (9) uz relaciju (10) je jedan od pristupa rješavanju numeričkog modela toka za otvorene vodonosne slojeve.

Numeričko rješenje može se dobiti i procesom linearizacije diskretnog prikaza odgovarajuće diferencijalne jednadžbe kojom je opisan tok u otvorenom sloju. Kako su posljednje diferencijalne jednadžbe po tipu nelinearne, to je i njihov diskretni oblik nelinearan, što ima za posljedicu relativno kompliciran oblik numeričke sheme. U tom smislu provode se pojednostavljenja, tako da se uvodi koeficijent transmisivnosti definiran relacijom (10), a kvadratni članovi potencijala se lineariziraju.

Postupak linearizacije može se izvršiti prema proceduri koju predlaže Mitchell (1977).

Položaj slobodne površine u vremenu može se odrediti koristeći izraz za veličinu pomaka slobodne površine vode uz poznavanje početne distribucije nivoa slobodne površine (Bear, 1972, Rushton & Radshaw, 1979), tj.:

$$\Delta H_{ijk}=-\frac{\Delta t}{n_{ef}}\left[K_x\left(\frac{\partial h}{\partial z}-1\right)tg^2\,\alpha+K_y\left(\frac{\partial h}{\partial z}-1\right)tg^2\,\beta\right]_{ijk} \tag{11}$$

gdje oznake znače:

ΔH — veličina pomaka slobodne površine vode,
Δt — vremenski inkrement unutar kojeg se dešava promjena nivoa slobodne površine,
α, β — kutovi koje zatvara slobodna površina s osi x, odnosno y,
n_{ef} — efektivna poroznost,
$\frac{\partial h}{\partial z}$ — gradijent potencijala u smjeru osi z, čvora (i. j.), definiran je relacijom:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)_{ijk} \approx \frac{h_{ijk} - h_{ijk-1}}{\Delta z} \qquad (12)$$

Rješenje jednadžbe toka (9) daje inicijalnu distribuciju nivoa slobodne površine. Tada se za određeni vremenski korak izračunavaju gradijenti potencijala i tangensi kutova, što rezultira distribucijom pomaka slobodne površine u čvorovima mreže. Položaj slobodne površine u svakom čvoru, za vrijeme $(t + \Delta t)$ definiran je izrazom:

$$h_{ijk} = h_{ijk-1} + \Delta H_{ijk} \qquad (13)$$

gdje su: h_{ijk} — potencijal na novom vremenskom nivou,
h_{ijk-1} — potencijal poznat iz prijašnjeg vremenskog nivoa.

Postupak određivanja distribucije potencijala kao funkcije vremena sukcesivno se nastavlja uz izbor odgovarajućeg vremenskog inkrementa unutar kojeg se promatra promjena visine slobodne površine.

Efikasnost simulacije distribucije potencijala prvenstveno ovisi o točnosti inicijalne raspodjele potencijala (visine slobodne površine) a zatim o veličini vremenskog inkrementa.

Inicijalna distribucija potencijala može se dobiti rješivši jednadžbu za stacionarni slučaj toka.

Veličina vremenskog inkrementa utječe na stabilnost numeričke sheme i, jasno, na efikasnost obrade, ukoliko se stabilnost osigurava izborom vrlo malih vremenskih inkremenata.

Evapotranspiracija i infiltracija

Za otvoren vodonosni sloj karakteristični prirodni procesi su: evapotranspiracija, evaporacija i infiltracija. Opis tih prirodnih pojava u numeričkim modelima može se realizirati pridruživanjem slijedećeg izraza članu f_{ijk-1} iz jednadžbe (9):

$$f_{ijk-1} = -\frac{S_{ij}}{\Delta t} h_{ijk-1} + W_{ijk} + Q^E_{ij} + Q^I_{ij} \qquad (14)$$

gdje su: Q^E — količina koja se ispari po jedinici površine, (LT^{-1}),
Q^I — količina koja se infiltrira po jedinici površine, (LT^{-1}).

Sve ostale veličine imaju isto značenje kao u prethodnom tekstu.

Član Q^E kojim su opisani efekti evaporacije i evapotranspiracije može se izraziti u najjednostavnijem obliku kao funkcija visine vode iz prethodnog vremenskog koraka (Prickett & Lonnquist, 1971.), ili se, a priori uzima kao konstantna veličina. U jednom i drugom slučaju, navedeni tretman člana Q^E može izazvati oscilacije rješenja iterativnih metoda ako se koristi u jednadžbama konačnih diferencija.

Mnogo bolje opisivanje pojave evapotranspiracije može se dobiti korištenjem slijedećih izraza:

$$Q^E = \begin{cases} Q_M \text{ za } h_{ijk-1} > M_{ij} \\ Q_M - \dfrac{Q_M}{d_l}(M_{ij} - h_{ijk}) \text{ za } \left[\begin{array}{l} d_l > (M_{ij} - h_{ijk-1} \\ h_{ijk-1} < M_{ij} \end{array} \right. \\ 0 \text{ za } d_l \leq (M_{ij} - h_{ijk-1}) \end{cases}$$

gdje su: Q_M — maksimalna količina evapotranspiracije po jedinici površine, (LT^{-1}),

d_l — debljina sloja ispod površine unutar kojeg dolazi do isparavanja, (L),

M — elevacija površine slobodne razine podzemne vode, (L).

Ako se koriste relacije (15) za opis evapotranspiracije, tada koeficijenti e_{ij} i f_{ijk-1} moraju biti modificirani u skladu s tim relacijama.

Efekt zakašnjelog otpuštanja vode iz sloja

Crpljenje vode u otvorenom sloju može prouzrokovati pojavu zakašnjelog otpuštanja vode iz sloja nakon pada razine slobodne površine. Količina vode koja se ocjeđuje iz pora opisana je izrazima koji su karakteristični za analitička rješenja jednadžbi toka (Boulton, 1954, Hantush, 1964).

Volumen vode koja se dobije ocijeđivanjem u k-tom vremenskom koraku je jednak sumi dviju količina i to:

— volumenu vode koji se dobije po jedinici površine sloja, a rezultat je ocjeđivanja tokom prethodnih (k—1) vremenskih koraka:

$$\alpha S_y \sum_{l=1}^{K-1} \Delta h_l \exp\left[-\alpha (t_k - t_l)\right] \quad \text{za } t_l < t_k \tag{16}$$

— volumenu vode koji se dobije po jedinici površine sloja ocjeđivanjem pora u promatranom vremenskom koraku:

$$S_y \left[1 - \exp(-\alpha \Delta t)\right] \frac{h_{ijk} - h_{ijk-1}}{\Delta t} \tag{17}$$

gdje veličine znače:

S_y — koeficijent specifičnog otpuštanja sloja,

Δt — promatrani vremenski inkrement,

Δh_l — pad potencijala u l-tom vremenskom inkrementu,

t_k, t_l — vrijeme proteklo od početka crpljenja do k-tog odnosno l-tog vremenskog koraka, $l < k$,

α — recipročna vrijednost Boultonova indeksa zakašnjenja (T^{-1}).

Osim količine vode definirane relacijama (16) i (17), kao posljedica sniženja nivoa u otvorenom sloju, javlja se i količina vode koja je dobivena iz elastičnih rezervi sloja. Ta količina se često zanemaruje u praktičnim proračunima jer je mnogo manja od količine koja se dobije ocijeđivanjem pora. Stoga će i u ovom slučaju, u prikazu članova jednadžbi konačnih diferencija biti zanemarena elastična svojstva sredine i fluida, tj. odgovarajući koeficijent će biti:

$$e_{ij} = -\left[a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} + d_{ij} + \frac{S_y}{\Delta t}(1 - \exp(-\alpha\Delta t)) \right] \tag{18}$$

$$f_{ijk-1} = W_{ijk} - \left[\frac{S_y}{\Delta t}(1 - e^{-\alpha\Delta t})\, h_{ijk-1} + \alpha S_y \sum_{l=1}^{K-1} \Delta h_l e^{-\alpha(t_k - t_l)} \right]$$

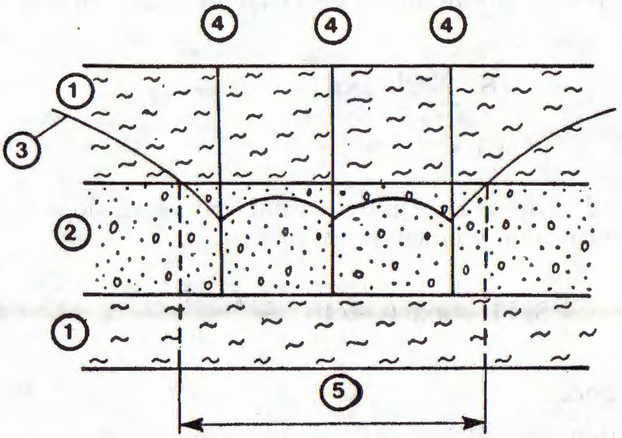
Konverzija koeficijenta uskladištenja

Tipičan primjer gdje je potrebna konverzija koeficijenta uskladištenja predstavlja tok podzemne vode u zatvorenom sloju, koji pod utjecajem drenaže ili crpljenja prelazi u tok koji je ekvivalentan onom, kod razmatranja otvorenog sloja (sl. 1).

Za konverziju parametra u takvom slučaju potrebno je poznavati elevaciju (kote) dna vodonosno sloja, visine na kojoj dolazi do konverzije i visine slobodne razine vode.

Odgovarajući opis gore navedene pojave, u jednadžbama konačnih diferencija rezultira koeficijentima e_{ij} i f_{ijk-1} je slijedeći:

a) za čvorove u kojima je došlo do promjene uvjeta toka iz zatvorenog vodonosnog sloja u uvjete toka u otvorenom vodonosnom sloju:



Sl. 1. Shematiziran prikaz područja konverzije. 1 — nepropusna krovina i podina, 2 — vodonosni sloj, 3 — sniženje razine vode kao posljedica crpljenja, 4 — bunari, 5 — područje konverzije.

Fig. 1. Shematic scatch of the area of conversion. 1 — imprevious layers, 2 — aquifer, 3 — drawdowns due to pumpage, 4 — wells, 5 — area of conversion.

$$e_{ij} = -\left[a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} + d_{ij} + \frac{S_y(i,j)}{\Delta t}\right] \tag{19}$$

$$f_{ijk-1} = W_{ijk} - \frac{S_y}{\Delta t} h_{ijk-1} - g'_{ij}$$

gdje je:

$$g'_{ij} = \frac{h_{ijk-1} - E_{ij} = (S - S_y)_{ij}}{\Delta t}$$

i gdje veličine znače:

E — visina na kojoj dolazi do konverzije, (L),
S — koeficijent uskladištenja zatvorenog vodonosnog sloja,
S_y — koeficijent otpuštanja otvorenog vodonosnog sloja.

b) u obrnutom slučaju za čvorove u kojima je došlo do promjene uvjeta toka iz otvorenog sloja u uvjete toka u zatvorenom sloju:

$$e_{ij} = -\left(a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} + d_{ij} + \frac{S_{ij}}{\Delta t}\right) \tag{20}$$

$$f_{ijk-1} = W_{ijk} - \frac{S_{ij}}{\Delta t} h_{ijk-1} - g'_{ij}$$

gdje je:

$$g'_{ij} = \frac{h_{ijk-1} - E_{ij} (S_y - S)_{ij}}{\Delta t}$$

a veličina: E — elevacija dna vodonosnog sloja (L).

Za čvorove u području gdje se tok odvija u uvjetima ekvivalentnim otvorenom sloju treba izvršiti proračun transmisivnosti prema jednadžbi (10).

Korekcija potencijala podzemne vode u bunaru

Izračunavanju potencijala (sniženja razine vode) u bunaru potrebno je pridati posebnu pažnju, jer je često slučaj da su mjerenja sniženja razine u bunaru jedini podaci koji su na raspolaganju za verifikaciju numeričkog modela. Izračunavanje se vrši uz korekciju koja je nužna jer potencijal čvora u koji je smješten bunar predstavlja prosječni potencijal bloka čiji reprezentant je dani čvor, a ne bunara koji je znatno manjeg radijusa. Za uspješno izračunavanje potencijala bunara potrebno je uvesti dodatna ograničenja u numerički model (Trescott i dr., 1977, Wanderg erg, 1974), koja se sastoje u slijedećem:

— bunar je lociran unutar kvadratnog bloka koji je izotropan i homogen,
— u bloku može biti lociran samo jedan bunar,
— bunar potpuno drenira vodonosni sloj,

— u času određivanja potencijala pretpostavlja se da je tok prema bunaru stacionaran i laminiran.

Uz gornje pretpostavke mogu se koristiti slijedeće relacije za izračunavanje potencijala u bunaru:

a) za slučaj zatvorenog vodonosnog sloja

$$h_B(i,j,k) = h_{ijk} - \frac{Q_{ijk}}{2\Pi T_{ij}} \ln \left(\frac{r_e}{r_B}\right)_{ij} \tag{21}$$

gdje su veličine:

T — koeficijent transmisivnosti u blok-bunaru,

r_B — efektivni radijus bunara,

r_e — radijus blok-bunara, koji je definiran kao (Rushton & Radshaw, 1979):

$$r_e = \frac{\Delta x_i}{4.81}$$

Q — količina crpljenja iz bunara,

b) za slučaj otvorenog vodonosnog sloja potrebno je korigirati debljinu saturiranog dijela sloja. Debljina saturiranog dijela vodonosnog sloja u bunaru se izražava ovom relacijom:

$$m_B(i,j,jk) = \left[(h_{ijk} - Z_{ij})^2 - \frac{Q_{ijk}}{\Pi K_{ij}} \ln \left(\frac{r_e}{r_B}\right)_{ij} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{22}$$

gdje su oznake:

m_B — debljina saturiranog dijela vodonosnog sloja,

z — visina podine vodonosnog sloja,

K — koeficijent hidrauličke provodljivosti u blok-bunaru.

Izračunavanje potencijala nastavlja se već prije spomenutim postupkom.

ZAKLJUČAK

U radu su opisani specifični prirodni procesi i inženjerske aktivnosti hidrogeoloških sistema simbolikom koja karakterizira numeričke modele. Prikazani su oni procesi koji se najčešće susreću u teoriji i praksi. Ti procesi mogu se opisati općim pojmovima kao što su ulaz vode u podzemlje i izlaz vode iz njega. U kategoriji »ulaz vode« u sloj opisani su procesi: prirodna infiltracija, međuslojno procjeđivanje i umjetna infiltracija. U kategoriji »izlaz vode« iz sloja opisani su procesi: evapotranspiracija i crpljenje pomoću bunara uz opis popratnih efekata.

Korištenjem numeričkog opisa obrađenih procesa numeričkim modelom moguće je simulirati i niz drugih događaja kao utjecaj kanala, drenaža, dotoka u građevinske jame, rudnike i sl.

Posebno je razrađen i uključen u opis numeričkog modela fenomen zakašnjelog otpuštanja vode kod otvorenih slojeva. Ta pojava se obično u okviru numeričkih modela ne uzima u obzir, pa se način prikaza tog fenomena u ovom radu može smatrati doprinosom razradi simulacije otvorenih slojeva pomoću numeričkih modela.

Opis prirodnih procesa i aktivnosti su prikazani tako da se odgovarajuće relacije mogu jednostavno izraziti simbolikom nekog programskog jezika. Svaka pojedina grupa relacija kojima je prikazan određeni proces predstavlja osnovicu modelu opće namjene. Takav način prikaza različitih procesa je vrlo pogodan za obrade na mikroračunalima, jer se ne opterećuje memorija nepotrebnim programima.

Programi kreirani u skladu s navedenom metodologijom, a priređeni za obrade na personalnom računalu IBM-AT, koriste se za simulaciju događaja u inženjerskim hidrogeološkim sistemima u okviru odgovarajućih projekata na kojima se radi na RGN fakultetu u Zagrebu.

Primljeno: 15. 12. 1987.

LITERATURA

Aziz, K. & A. Setari (1979): Petroleum reservoir simulation, Applied Publ. LTD, 476 str., London.

Bear, J. (1972): Dynamics of fluids in porous media, Elsevier, 764 str., New York.

Boulton, N. S. (1954): Unsteady radial flaw to pumped well allowing for Delayed yield from storage. *Int. Assos. Hydr., Publ. 37*, 472—477.

Bredehoeft, J. D. & G. F. Pinder (1970): Digital analysis of areal flow in multiaquifer groundwater systems: a quasi three-dimenzional model. *W. R. R., 6, (3)*, 883—888, Washington.

Hantush, M. S. (1964): Hidraulics of wells, ed. V. T. Chow, *Advances in Hydroscience,* Academic Press, 281—432, New York.

Heinrich-Miletić, M. (1980): Analiza hidrogeoloških sistema primjenom numeričkih modela simulacije. Zbornik referata 6. Jugosl. simp. o hidr. i inž. geol., 11—17, Portorož.

Heinrich-Miletić, M. (1982): Informacijski aspekti primjene numeričkih modela u analizi inženjerskih hidrogeoloških sistema. Disertacija, 220 str., Beograd.

Kruseman, G. P. & De Ridder, N. A. (1970): Analysis and evaluation of pumping test data. *Wageningep,* 198 str.

Miletić, P. & M. Heinrich-Miletić, (1982): Uvod u kvantitativnu hidrogeologiju, I dio, NIŠRO Varaždin, 220 str., Varaždin.

Miletić, P. & M. Heinrich-Miletić, (1986): Metodološki pristup istraživanju i gospodarenju rezervama podzemnim vodama, *Nafta,* 92 str., Zagreb.

Mitchell, A. R. (1977): Computional method in partial differential equations. J. Wiley, 343 str., London.

Pinder, G. F. (1969): An iterative digital model for aquifer evolution. U. S. Geol. Survey Tech. Water-Resources Invest. Book 7. Chap. C. 1. 18 str., Washington.

Pinder, G. F. & J. D. Bredehoeft (1968): Application of digital computer for aquifer evolution. *W. R. R. 4, (5)*, 1069—1093, Washington.

Pricket, T. A. & C. G. Lonnguist (1972): Selected digital computer techniques for groundwater resource evoluation. *Illinois State WWater Survey Bull. 55*, 61 str., Illinos.

Rushton, K. R. & S. C. Radshaw (1979): Seepage and groundwater flow, J. Wiley, 339 str., Chechster.

Schwarz, J. (1976): Linear model for groundwater management, *J. of Hydrology, 28*, 277—392, Washington.

Trescott, P. C., G. F. Pinder & S. P. Larson (1977): *Techniques of water-resource investigations of U. S. Geol. Survey, Book* 7, Chap. C1, p. 116, Washington.

Vanderberg, A. (1974): Program SOPH — Simulation of time-variant piezometric surface in confined aquifer subjected to pumping. Inland Water Directorate. Water Resource Branches, 56 str., Toronto.

Wanakule, N., L. W. Mays & L. S. Lasdon (1985): Optimal management of large scale aquifers, Methodology and applications. *W. R. R. 22, (4)*, 447—465, Washington.

Young, R. A. & J. D. Bredehoeft (1972): Digital computer simulation for solving manangement problems of conjuctive groundwater and surface water systems. *W. R. R. 8, (3)*, 533—556, Washington.

Numerical models of groundwater systems

I. Finite differences

M. Heinrich-Miletić

In this work specific natural processes and engineering activities of hydrogeological systems are described with the symbols characterizing numerical models. The following phenomena are treated: natural and artificial infiltration (relations 4 and 14), leakage (relations 6 and 8), evapotranspiration (relations 14 and 15), the effect of delayed yield (relation 18) and pumping from the well, and accompanying effects (relations 4, 19, 20, 21 and 22). The relations describing the characteristics of certain hydrogeological models or specific activities are presented in such a way that they can be the bases of a series of independent program moduli being associated to the main program.

In a characteristic way the effect of delayed yield of water-table aquifers (relation 18) is included into the numerical model.