Geol. vjesnik	Vol. 42	str. 213—219	Zagreb 1989.

UDK 556.013:532.5 *Pregledni članak*

Rješavanje matematičkih modela toka podzemnih voda primjenom metode konačnih elemenata

Marija HEINRICH-MILETIĆ

Rudarsko-geološko-naftni fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Pierottieva 6, YU — 41000 Zagreb

Ključne riječi: Konačni elementi, Matematički modeli toka podzemnih voda, Galerkinova metoda težinskog reziduala.

Key words: Finite element method, Mathematical models of groundwater flow, Galerkin method of waighted residuals.

U radu su opisani osnovni principi metode konačnih elemenata koja se bazira na Galerkinovu pristupu težinskog reziduala u rješavanja matematičkih modela toka podzemnih voda.

This work discusses the fundamental principles of the Finite element method based on the Galerkin Method of Weighted Residuals in solving the mathematical model of groundwater flow.

UVOD

Metoda konačnih elemenata (MKE) je jedna od numeričkih metoda koje se koriste u rješavanju matematičkih modela toka podzemnih voda.

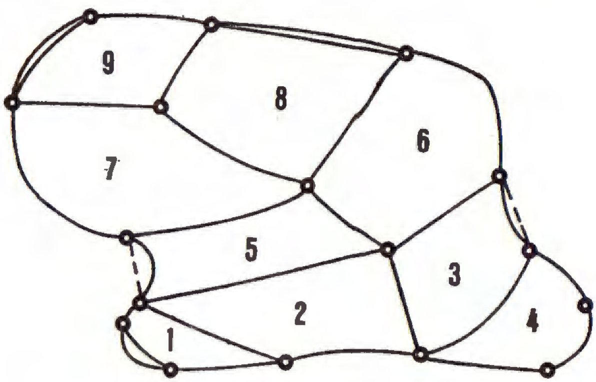
Kao i kod svake numeričke metode procedura rješavanja modela počinje diskretizacijom domene integracije. U ovom slučaju domena se podijeli na niz elemenata proizvoljnog oblika (sl. 1). Oblik pojedinog elementa ovisi o položaju i broju čvorova koji mu definiraju granice.

Zatim slijedi definiranje numeričkog rješenja parcijalne diferencijalne jednadžbe u obliku linearne kombinacije pretpostavljenih vrijednosti zavisne varijable i baznih funkcija povoljnih svojstava.

Diferencijalna jednadžba zamijeni se sistemom integralnih jednadžbi postavljenih za svaki elemenat domene integracije. Kod metoda težinskog reziduala, sistem integralnih jednadžbi dobije se iz uvjeta ortogonalnosti reziduala i težinskih funkcija (Pinder & Gray, 1977, Zienkiewicz, 1972). Slijedeći korak je provođenje numeričke integracije preko svakog elementa za dani vremenski korak što konačno rezultira sistemom simultanih linearnih algebarskih jednadžbi. Rješenje sistema jednadžbi je numeričko rješenje diferencijalne jednadžbe u specificiranim točkama domene integracije.

Bazične funkcije su obično polinomi prvog, drugog ili trećeg stupnja. Izbor bazičnih funkcija i oblik elemenata ovisi o karakteristikama problema koji se rješava.

Za slučaj dvodimenzionalnih problema toka koriste se često trokutni elementi s linearnim baričnim funkcijama. Ako se koriste mješoviti kvadrilateralni elementi tada su bazične funkcije kombinacije polinoma različitog stupnja. Nadalje polinomi višeg reda koriste se za rana vremena procesa simulacije, jer se u tom slučaju dobiju rješenja veće točnosti. Za kasnija vremena pogodnije je koristiti aproksimaciju polinoma nižeg reda. Proces obrade u tom sučaju je brzi, a elementi višeg reda preodređuju rješenje. Elementni s linearnim bazičnim funkcijama uglavnom daju dobru aproksimaciju, a obrada je efikasnija s većim brojem linearnih elemenata nego s manjim brojem elemenata koji su opisani polinomima višeg reda (Pinder & Frind, 1972).



Sl. 1. Domena toka podjeljena na niz površinskih elemenata
Fig. 1. Flow domain devided into a series of surface elements

PRIMJENA GALERKINOVA PRISTUPA METODI KONAČNIH ELEMENATA U RJEŠAVANJU MODELA TOKA

Gelerkinov pristup metodi težinskog reziduala karakterizira identičnost bazičnih i težinskih funkcija. Za ilustraciju primjene te metode uzeta je jednadžba toka koja opisuje nestacionarni horizontalan tok u zatvorenom sloju. Ista jednadžba zbog usporedbe rješavana je i metodom konačnih diferencija u radu Heinrich-Miletić (1988), tj.:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Tx\,\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(Ty\,\frac{\partial H}{\partial y}\right)=S\,\frac{\partial H}{\partial t} \qquad (1)$$

gdje su:

H — visina pijezometarskog nivoa podzemne vode, (L),
Tx, Ty — komponente tenzora transmisivnosti u x odnosno y smjeru, ($L^2 T^{-1}$),
S — koeficijent uskladištenja (1).

Jednadžba (1) može se pisati u obliku:

$$L(H) = 0 \tag{2}$$

gdje je funkcional L definiran kao:

$$L(H) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(Tx\,\frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(Ty\,\frac{\partial H}{\partial y}\right) - S\,\frac{\partial H}{\partial t} \tag{3}$$

Rješenje jednadžbe (2) može se predstaviti u obliku:

$$H\,(x, y, t) = \hat{h}\,(x, y, t) = \sum_{i=1}^{N} h_i(t)\,\Phi_i(x, y) \tag{4}$$

gdje su:

H — egzaktno rješenje jednadžbe (2),
$\hat{h}$ — aproksimacija za H prikazana konačnim redom,
h_i — aproksimacija za H u čvoru i,
Φ_i — bazične funkcije, za koje vrijedi da je $\Phi = 1$, u i-tom čvoru, a $\Phi = 0$ u svakom drugom čvoru,
N — broj čvorova u domeni integracije.

Razvoj u red (4) predstavljat će egzaktno rješenje jednadžbe (2) kada $N \to \infty$. Za konačni broj članova reda prikaz (4) će uz odgovarajući izbor koeficijenata $h_i(t)$ zadovoljavati diferencijalnu jednadžbu ako je rezidual $R\,(\hat{h})$ definiran kao:

$$R(\hat{h}) = L\,[\sum_{i=1}^{N} h_i(t)\,\Phi_i(x, y)] \tag{5}$$

jednak nuli.

Gornji zahtjev ekvivalentan je zahtjevu ortogonalnosti reziduala i svih težinskih funkcija uz pretpostavku da su funkcije L(H) kontinuirane:

$$\iint_D L(\hat{h})\,\Phi_j\,dx\,dy = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, N \tag{6}$$

gdje je:

D — domena integracije smještena u xy ravnini.

Uvrštavajući funkcional L obrasca (3) u kojem je H aproksimaran s redom (4), u relaciju (6) slijedi:

$$\iint_D \left\{\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(Tx\,\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(Ty\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\sum_i h_i\,\Phi_i\right\}\Phi_j\,dx\,dy -$$

$$-\iint_D \left[S\,\frac{\partial}{\partial t}\sum_i h_i\,\Phi_i\right]\Phi_j\,dx\,dy = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, N \tag{7}$$

Ako se unutar elemenata javljaju promjene svojstava parametara T, tada se transmisivnost može prikazati analogno potencijalu kao linearna kombinacija pretpostavljenih vrijednosti transmisivnosti i baznih funkcija:

$$T_\alpha (x, y) \approx \hat{T}_\alpha (x, y) = \sum_{l=1}^{N} T_{\alpha l} \, \Phi_l(x, y) \tag{8}$$

Uvrštavanjem (8) u jednadžbu (7) dobije se sistem integralnih jednadžbi. U tom slučaju uvjet minimuma reziduala R piše se u obliku:

$$\iint_D L(\hat{h}, \hat{T}) \, \Phi_j \, dx \, dy = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, N \tag{9}$$

Uvrštavajući u gornju relaciju izraz za funkcional $L(\hat{h}, \hat{T})$ slijedi:

$$\iint_D \left[\frac{\partial Tx}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + Tx \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial Ty}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + Ty \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - S \frac{\partial h}{\partial t} \right] \Phi_j \, dx \, dy = 0$$
$$j = 1, 2, \ldots, N \tag{10}$$

Koristeći Green-ov teorem (Spiegel, 1977) mogu se gornji integrali transformirati tako da se druge derivacije prikažu pomoću odgovarajućih izraza u kojima su dane prve derivacije varijable h, tj.:

$$\iint_D \left[\hat{T}x \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + \hat{T}y \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} + S \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} \Phi_j \right] dx \, dy -$$
$$- \int_C \left[\hat{T}x \, \Phi_j \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} + \hat{T}y \, \Phi_j \frac{\partial x}{\partial y} \right] dC = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, N \tag{11}$$

gdje je:

C — krivulja koja omeđuje domenu D.

Nakon uvrštavanja izraza (4) i (8) u (1 1) dobije se konačni oblik sistema skupnih jednadžbi:

$$\iint_D \sum_l \left[T_{xl} \left(\sum_i h_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \right) + T_{yl} \left(\sum_i h_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right) \right] \Phi_l \, dx \, dy -$$
$$- \iint_D \sum_i \Phi_i \frac{\partial h_i}{\partial x} \Phi_j \, dx \, dy - \int_C \left[\sum_l T_{xl} \, \Phi_j \sum_i h_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} \right] dc -$$
$$- \int_C \left[\sum_l T_{yl} \, \Phi_j \sum_i h_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} \right] dc + \iint_D S \, \Phi_j \sum_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} dx \, dy = 0$$
$$j = 1, 2, \ldots, N \tag{12}$$

gdje je:

n — normala na domenu integracije D.

Sistem integralnih jednadžbi (12), nakon provedene integracije preko domene D, prelazi u sistem od N algebarskih jednadžbi po h, za svaki vremenski korak.

Za slučaj kada je koeficijent transmisivnosti konstanta unutar svakog elementa tada se jednadžba (12) reducira na oblik:

$$\iint_D \Big[\sum_i T \left(h_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + h_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right) + S \sum_i \Phi_i \frac{\partial h_i}{\partial t} \Phi_j \Big] \, dx\, dy -$$

$$- \int_C \sum_i T\, h_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} \Phi_j \, dc = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, N \tag{13}$$

Krivuljni integral može se nadalje transformirati tako da se normalna derivacija funkcije Φ izrazi pomoću projekcije na smjer koordinatnih osi, tj.:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} l_x + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} l_y \tag{14}$$

gdje su:

l_x, l_y — cosinusi smjerova normale n.

Uz izraz (14), te nakon sređivanja sistem jednadžbi (13) može se pisati u obliku:

$$\iint_D \sum_i T \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right) h_i \, dx\, dy -$$

$$- \iint_D S \sum_i \Phi_i \frac{\partial h_i}{\partial t} \Phi_j \, dx\, dy -$$

$$- \int_C \Big[\sum_i T \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} lx + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} ly \right) h_i \Big] \Phi_j \, dc = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, N \tag{15}$$

U matričnom obliku sistem jednadžbi (15), može se pisati kao:

$$[A]\{h\} + [B] \frac{d}{dt} \{h\} + \{F\} = 0 \tag{16}$$

gdje su:

A — matrica N-tog reda s elementima

$$d_{ij} = \sum_e \iint_{De} T \left(\frac{\partial \Phi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j^e}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j^e}{\partial y} \right) dx\, dy \tag{17}$$

B — matrica N-tog reda s elementima:

$$b_{ij} = \sum_e \iint_{De} S\, \Phi_i^e \, \Phi_j^e \, dx\, dy \tag{18}$$

F — N-komponentni vektor s elementima:

$$f_i = \sum_e \int_{Ce} T \frac{\partial \Phi_i^e}{\partial n} \Phi_j \, dc$$

ili pisan u obliku:

$$f_i = \sum_e \int_{Ce} T \left(\frac{\partial \Phi_i^e}{\partial x} lx + \frac{\partial \Phi_i^e}{\partial y} ly \right) \Phi_j \, dc \qquad j = 1, 2, \ldots, N \quad (19)$$

gdje su:

Φ^e — bazična funkcija elementa e,
D_e — domena integracije po elementu e,
C_e — granica elementa e.

Integracija u izrazima (17), (18) i (19) provodi se preko površine elementa (D_e) ili po granici elementa (Ce), a sumacije preko elemenata koje sadrži i-ti čvor.

Integracija u gornjim izrazima provodi se numerički. Primjeri za provedenu numeričku integraciju u slučaju izoparametričkih kvadrilateralnih elemenata mogu se naći u radovima Huyakorn & Pinder 1983, i Pinder & Gray, 1977.

Nakon provedbenih numeričkih operacija dobiju se vrijednosti koeficijenata globalnih matrica i vektora sistema jednadžbi (16).

Rješenje tog sistema algebarskih jednadžbi predstavlja numeričko rješenje polazne diferencijalne jednadžbe (1) u čvorovima superponirane mreže elemenata.

Galerkinova metoda konačnih elemenata je konvergentna za gotovo sve simetrične linearne diferencijalne operatore i za veliki broj nesimetričnih i nelinearnih operatora. Dakle, za probleme koji se odnose na tok podzemne vode kada se kod većine problema susrećemo simetričnim, linearnim i nelinearnim diferencijalnim operatorima, Galerkinova metoda težinskog reziduala može se tretirati kao konvergentna shema.

ZAKLJUČAK

U simulacijama toka podzemnih voda često se koristi Galerkinova metoda konačnih elemenata pa su stoga u ovom radu dani osnovni principi te metode. Prednosti ove metode u odnosu na metodu konačnih diferencija dolaze do izražaja kada je domena integracije nepravilna granica te ako je porozna sredina izrazito nehomogena i anizotropna.

Opis pomičnih granica kao što je slobodno vodonosno lice kod otvorenih vodonosnih slojeva je primjer gdje ta metoda ima znatno više prednosti od ostalih numeričkih metoda. Rješavanje matematičkog modela 3D toka, uz promjenu oblika elemenata koji čine slobodnu površinu, moguće je provesti relativno jednostavno, tj. samo korištenjem metode konačnih elemenata (Neuman & Whiterspoon, 1971). Primjena metode konačnih elemenata u ovom radu, u odnosu na uobičajene pristupe, prilagođena je modularnoj organizaciji programa obrade na elektroničkim računalima.

Primljeno: 05. 01. 1989.

LITERATURA

Heinrich-Miletić, M. (1988): Numerički model inženjerskih hidrogeoloških sistema. *Geol. vjesnik, 41,* 267—280, Zagreb.

Huykorn, P. S. & G. F. Pinder (1983): Computional Methods in Subsurface Flow. Academic Press, 473 str. New York.

Neuman, S. P. & Witherspoon, P. A. (1971): Analysis of non steady flow with a free surface using the finite element method. *W. R. R., 7, (4),* 611—623, Washington.

Pinder, G. F. Frind, E. O. (1972): Application om Galerkin's procedure to aquifer analysis. *W. R. R. 8, (1),* 108—120, Washington.

Pinder, G. E. & Gray, W. G. (1977): Finite element simulation in surface and subsurface hydrology. Academic press, 295 str., New York.

Spiegel, M. R. (1974): Vector Analysis. Schaum's outline Series, McGraw-Hill Comp. 225 str., New York.

Zienkiewicz, O. C. (1977): The finite element method. McGraw-Hill Comp. 787 str., London.

Solving mathematical models of groundwater flow with application finite element method

M. Heinrich-Miletić

Simulation of groundwater flow is often performed by Finite element method. The advanteges of this method compared with Finite differences method is specially expressed when there are irregular boundaries of domain of integration as well as if a porous media is inhomogeneous and anisotropic. The advantages of this method are also obvious in solving the flow problems in inhomogeneous and anisotropic water-table aquifers with the sloping bed. The description of variable boundary water-table aquifer as well as changing the element's shapes to describe the free surface, is example where Finite element method has a special advantage.

The application of the method in this work compared with usual approached is adapted to modular organization of the performance program on computers.