

Geol. vjesnik	Vol. 42	str. 221—234	Zagreb 1989.
---------------	---------	--------------	--------------

UDK 556.013:556.3

Izvorni znanstveni članak

Numerički modeli inženjerskih hidrogeoloških sistema

II METODA KONAČNIH ELEMENATA

Marija HEINRICH-MILETIĆ

*Rudarsko-geološko-naftni fakultet Sveučilišta u Zagrebu,
Pierottijeva 6, YU—41000 Zagreb*

Ključne riječi: Numerički modeli, Inženjerski hidrogeološki sistemi
Key words: Numerical Models, Engineering hydrogeological systems

U radu su opisane inženjerske aktivnosti i specifični prirodni procesi koji karakteriziraju sisteme podzemnih voda. Simbolika opisa u numeričkim modelima bazira se na Galerkinovoj metodi težinskog reziduala.

In this paper the engineering activities are presented as well as specific natural processes characterising the groundwater systems. Galerkin method of weighed residual has been used.

UVOD

Za razumijevanje sadržaja ovog rada prethodno je prikazana teoretska osnova metode konačnih elemenata na način prikladan za razumijevanje teksta koji slijedi (Heinrich-Miletić, 1989). U tom radu dani su osnovni principi metode konačnih elemenata primjenjene u rješavanju matematičkih modela toka fluida u poroznoj sredini. Za ilustraciju numeričke metode tretiran je matematički model 2D toka fluida u zatvorenoj elastičnoj poroznoj sredini.

Ovdje će u daljem tekstu biti prikazani konkretni numerički modeli toka u kojima se kao osnova koristi diferencijalna jednadžba toka za zatvoren vodonosni sloj. Izvorna jednadžba je također i modificirana tako da može predstavljati osnovu matematičkih modela za druge tipove vodonosnih slojeva (poluzatvoren i otvoren), te za opis različitih inženjerskih aktivnosti u hidrogeološkom sistemu.

PRIKAZ GRANICA NUMERIČKOG MODELA

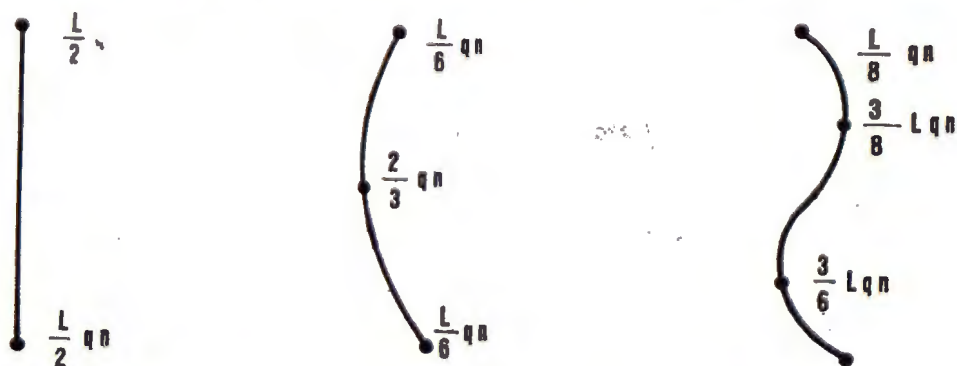
Kod Neumanovog tipa granica, komponente vektora F iz sistema integralnih jednadžbi Galerkinove sheme definirane su na slijedeći način:

$$\int_{C_e} T \left(\frac{\partial \hat{H}}{\partial x} l_x + \frac{\partial \hat{H}}{\partial y} l_y \right) \Phi_j ds = \int_{C_e} q_n \Phi_j dc \quad (1)$$

gdje su:

- q_n — prosječan normalni flux preko stranice elementa e .
 l_x, l_y — cosinusi smjerova normale na granicu C_e .

Raspodjela fluxa po čvorovima definirana je veličinama danim na slici 1 (Pinder i Gray, 1977).



Sl. 1. Raspodjela fluxa po čvorovima, ako su bazične funkcije polinomi prvog, drugog i trećeg stupnja

L — dužina stranice elementa preko koje postoji flux

Fig. 1. Flux distribution according to nodal points if trial functions are polynoms of 1st, 2nd and 3rd degree

L — side length of the element over which there is flux

Nepropusna granica simulira se tako da se za vrijednost krivuljnog integrala (1) u svim čvorovima nepropusne granice uzima vrijednost nula.

Granice Dirichletova tipa, simuliraju se tako da se u čvorovima koji leže na granici poznatog potencijala pripiše dana vrijednost i takvi čvorovi se ne tretiraju u određivanju koeficijenata matrica sistema. Rang matrice A smanjuje se upravo za broj čvorova poznatog potencijala.

Vrijednosti potencijala u slučaju tih čvorova predstavljaju doprinos odgovarajućim koeficijentima vektora F .

CRPLJENJE I SLIČNE AKTIVNOSTI

Crpljenje ili infiltracija u numeričkom modelu simuliraju se tako da se vektor F proširi s dodatnim članom koji opisuje matematički ponor ili izvor:

$$F_i' = \iint_{D_e} \Phi_j \sum_{k=1}^m Q_k \delta(x - x_k, y - y_k) dx dy \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

gdje oznake znače:

- F_i' — vrijednost dopunskog izraza za element vektora F ako je u čvoru i simuliran bunar ili slično,

- Q_k — količina cpljenja, ako je $Q_k > 0$, i količina infiltracije ako je $Q_k < 0$, za k -ti čvor
 δ — Diracova funkcija
 x_k, y_k — koordinate k -tog čvora

Veličina Q može biti zadana u modelu kao konstanta, odnosno kao funkcija vremena zadana unaprijed ili, ona se može mijenjati kao funkcija izračunate distribucije potencijala u određenom vremenskom koraku.

EVAPOTRANSPIRACIJA

Količina podzemne vode koja izlazi iz vodonosnog sloja u atmosferu putem isparavanja ili, biva potrošena od strane biljaka u površinskim naslagama, može se izraziti kao niz distribuiranih ponora po domeni toka. Ta količina može biti konstantna za određena sezonska razdoblja a može se definirati kao promjeniva količina tj. kao funkcija nivoa slobodne površine podzemne vode (sl. 2). Ako se koristi ovaj drugi prikaz, onda vrijede slijedeće relacije:

$$Q_i^E = \begin{cases} Q_m & d_i < 0 \\ Q_m - \frac{Q_m d_i}{d_0} & 0 \leq d_i \leq d_0 \\ Q_m = 0 & d_i > d_0 \end{cases} \quad (3)$$

gdje su:

- d — dubina slobodne površine vode mjerena od vanjske površine
 $d_i(t) = M_i - h_i(t)$
 M — debljina vodonosnog sloja
 h — visina slobodne razine podzemne vode
 d_0 — kritična dubina, ispod koje ne postoji evapotranspiracija
 Q^E — količina koja se evapotranspirira, $Q_i = f(x_i, y_i)$
 Q_m — maksimalna količina evapotranspiracije, kada je razina slobodne površine vode u nivou vanjske površine.

Vektor F će u slučaju da postoji evapotranspiracija u i -tom čvoru sadržavati i slijedeći član:

$$F_i'' = \iint_{D_0} Q_i^E \Phi_i dx dy \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

gdje je:

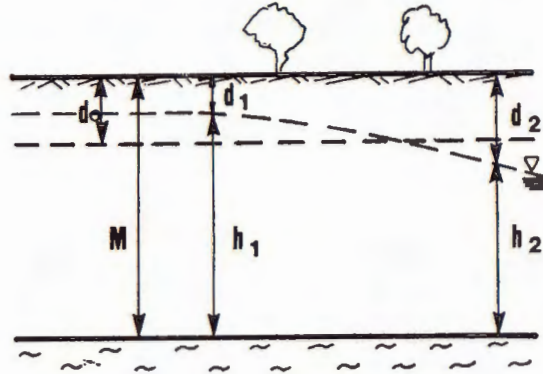
- Q_i^E — veličina definirana apriori ili, definirana relacijama (3).

Veličina Q^E , koja je poznata preko elementa može se dati prikazom pomoću bazičnih funkcija u cilju dobivanja raspodjele po čvorovima.

$$Q^E \approx \sum_{k=1}^m Q_k \Phi_k \quad (5)$$

gdje su:

- Q_k — aproksimativna vrijednost Q u k -tom čvoru
- Q^E — količina evapotranspiracije preko elementa e
- m — broj čvorova u elementu e .



Sl. 2. Grafički prikaz fenomena evapotranspiracije. Oznake na slici imaju isto značenje kao i veličine relacije (3)

Fig. 2. Diagram presenting the evapotranspiration phenomenon. Marks on the diagram have the same significance as magnitudes on the relation (3)

U slučaju da se koristi izraz (5) za prikaz evapotranspiracije vektor F će biti nadopunjen članom ovog oblika

$$F_i'' = \iint_{De} \sum_{k=1}^m \Phi_k Q_k \Phi_j dx dy \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

MEĐUSLOJNO PROCJEĐIVANJE

Za opis toka u poluzatvorenom sloju, kada postoji procjeđivanje (kroz polupropusni sloj iz krovine (ili podine), kao osnova može poslužiti numerička shema konačnih elemenata nadopunjena članom kojim je definirana količina koja se procjeđuje kroz polupropusni sloj. U prikazu navedenog člana poslužit će analitički izrazi za količinu procjeđivanja kroz polupropusni sloj (Hantush, 1964, Bredehoeft i Pinder, 1970.).

Količina koja se procjeđuje iz krovine u jedinici vremena kroz jedinicu površine sloja je dana izrazom:

$$Q_L = \frac{K'}{m'} (H_0 - h_p) + R \frac{K'}{m'} (h - h_p) \quad (7)$$

gdje su:

- Q_L — vertikalni dotok iz krovine kroz polupropusni sloj, (L)

- K' — koeficijent provodljivosti polupropusnog sloja, (LT^{-1})
 m' — debljina polupropusnog sloja, (L)
 H_0 — potencijal gornjih krovinskih naslaga, (L)
 h_p — potencijal u polupropusnom sloju, (L)
 h — potencijal u glavnom sloju, (L)
 R — koeficijent međuslojnog procjeđivanja, (l)
 $Q > 0$ — u slučaju dotoka u glavni sloj.

Prvi član izraza (7) opisuje stacionarnu komponentu količine procjeđivanja kako je definirao H a n t u s h, 1964. Drugi član istog izraza definira nestacionarnu komponentu toka kroz polupropusni sloj. Veličina ove komponente ovisi o razlici potencijala gornjeg i glavnog sloja i o veličini koeficijenta međuslojnog procjeđivanja (R).

Vrijednosti koeficijenta R definirane su slijedećim relacijama:

$$R = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2 \pi K' t}{3m'^2 S'_s}\right) \quad \text{za} \quad \frac{K' t}{m'^2 S'_s} > 3 \cdot 10^{-3}$$

$$R = \left(\frac{3m'^2 S'_s}{\pi K' t}\right) \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 m'^2 S'_s}{K' t}\right) \quad \text{za} \quad \frac{K' t}{m'^2 S'_s} < 3 \cdot 10^{-3}$$

gdje su:

- S'_s — koeficijent specifičnog uskladištenja polupropusnog sloja (L^{-1})
 t — vrijeme procjeđivanja kroz polupropusni sloj (T) .

Ostale veličine imaju isto značenje kao i u relaciji (7).

U slučaju da polupropusni sloj ne reagira elastično tada se može zanemariti nestacionarna komponenta veličine Q_L pa ostaje samo prvi član u izrazu (7).

Veličina Q_L uključuje se u numerički prikaz jednadžbe toka kao dio komponenata vektora F ako se radi o stacionarnoj pojavi:

$$F_i^L = - \iint_{D_e} \frac{K_i'}{m'_i} \Delta h_i \phi_j dx dy \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

gdje je:

- Δh — razlika potencijala polupropusnog i gornjeg sloja (L) .

Ako se radi o nestacionarnom procjeđivanju tada se izraz za Q_L jednim dijelom pridružuje komponentama vektora F (oni dijelovi u kojima su dane konstantne veličine), a dio izraza u kojem se javlja veličina $h(t)$ čini komponente elemenata matrice A . Oblik tih komponenata ovisi o definiranju izraza za koeficijent procjeđivanja (R). U najjednostavnijem slučaju kada je $R = 1$, tada nestacionarna komponenta količine procjeđivanja može se izraziti kao:

$$Q_L(t) = \frac{K'}{m'} (h - H_0) \quad (9)$$

U navedenom slučaju elemenat matrice sistema A biti će u obliku:

$$a_{ij} = \sum_e \iint_{D_e} T \left[\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) + \frac{K'_i}{m'_i} \phi_i \phi_j \right] dx dy \quad (10)$$

OTVOREN VODONOSNI SLOJ

Za simulaciju toka u otvorenom vodonosnom sloju kada vrijedi Dupuitova aproksimacija, tok se tretira kao ravninski i za njegov opis može poslužiti jednačina koja opisuje 2D nestacionarni tok u zatvorenom sloju. Koeficijent transmisivnosti u tom slučaju mijenja se kao funkcija debljine saturacije sloja, odnosno kao funkcija visine slobodne površine podzemne vode, što daje ovaj oblik jednačini:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x m(H) \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y m(H) \frac{\partial H}{\partial y} \right) = S_y m(H) \frac{\partial H}{\partial t} \quad (11)$$

gdje je:

S_y — koeficijent specifičnog otpuštanja, (L^{-1}).

Jednačina (11) je u suštini nelinearna diferencijalna pa je za njeno rješavanje potrebno koristiti i odgovarajuće u ovom slučaju numeričke metode (Bachte & Wilson, 1976). Aproksimacija kao što je na primjer postupak kvazilinearizacije jednačine toka pokazao se efikasnim, a odgovarajuća numerička shema dobro opisuje stanje toka u slučajevima kada se debljina saturacije ne mijenja brzo u vremenu. U tom slučaju koeficijent transmisivnosti se prikazuje kao:

$$T_{k+1}^{(l+1)} = K m_k^{(l)} \\ m_k^{(l)} = H_k^{(l)} - H_{k-1}^{(l)} \quad (12)$$

gdje su:

- T — transmisivnost na $k + 1$ vremenskom nivou,
- m — debljina saturacije na k -tom vremenskom nivou,
- H — visina slobodne površine podzemne vode,
- l — indeks iteracijskog koraka,
- K — oznaka vremenskog koraka.

Sistem integralnih jednačini konačnih elemenata uz izraze (12), u slučaju implicitne aproksimacije vremenske derivacije, ima oblik:

$$\left([A]_{k+1} + \frac{1}{\Delta t} [B] \right)^{(l)} \{H\}_{k+1}^{(l+1)} = \frac{1}{\Delta t} [B] \{H\}_k^{(l)} + \{F\}_k^{(l)} \quad (13)$$

gdje su:

- H — numeričko rješenje jednačine (11),
- l — indeks iteracijskog koraka,
- k — označava vremenski nivo na kojem su određeni elementi matrica, odnosno vektora.

[A] — matrica N-tog reda, čiji elementi su definirani relacijom (10),

[B] — matrica N-tog reda čiji elementi su definirani relacijom:

$$b_{ij} = \sum_c \iint_{D_c} S \Phi_i^c \Phi_j^c dx dy$$

{F} — vektor s elementima koji u općem slučaju poprimaju oblik:

$$f_i = \sum_c \int_{C_c} T \frac{\partial \Phi_i^c}{\partial n} \Phi_j^c dc \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Kao kriterij za procjenu točnosti određivanja koeficijenata matrice obično služe izrazi oblika (Pinder i Gray, 1977):

$$\{H\}_{K+1}^{(l+1)} = (1 - \varepsilon) (\{H\}_{K+1}^{(l+1)} + \varepsilon \{H\}_{K+1}^{(l)}) \quad (14)$$

gdje je:

ε — težinski faktor koji poprima vrijednosti od 0 do 1.

Najbrža konvergencija postiže se za vrijednost $\varepsilon = 0,7$, no vrlo često se koristi vrijednost $\varepsilon = 0$.

FENOMENI U NESATURIRANOM DIJELU OTVORENOG VODONOSNOG SLOJA

Tok u otvorenom sloju bio je dosad tretiran rješavajući jednadžbu dvodimenzionalnog toka za zatvoreni sloj uz određivanje koeficijenta transmisivnosti u svakom vremenskom koraku kao funkcije visine saturacije sloja.

Egzaktniji pristup navedenoj problematici sastojao bi se prvenstveno u tome da se u procesu rješavanja jednadžbe toka uzimaju u obzir i granični uvjet za slobodnu površinu i granični uvjet za granicu procjeđivanja. Uvođenja navedenih fenomena bit će prikazana uz fiksni oblik elemenata koji čine domenu i granicu.

Ako se radi o nehomogenoj izotropnoj sredini, uz zanemarivanje svojstava elastičnosti sredine i fluida, pripadna diferencijalna jednadžba dvodimenzionalnog toka poprima oblik:

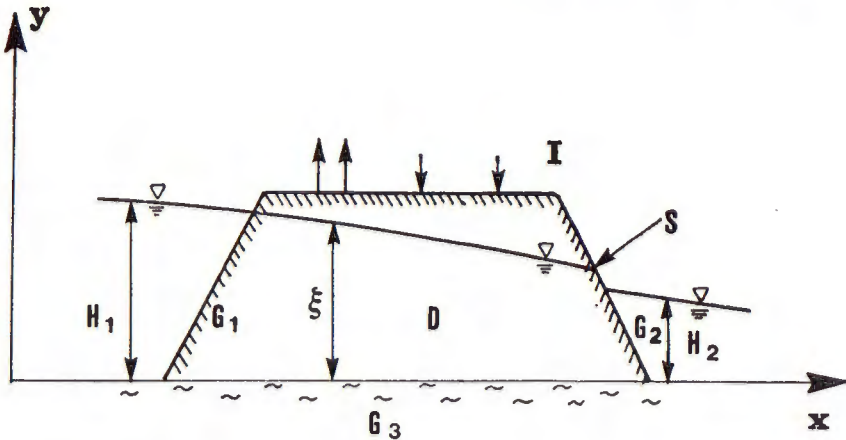
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial H}{\partial y} \right) = S_y \frac{\partial H}{\partial t} \quad (15)$$

Početni i granični uvjeti definirani su tako da opisuju tok kroz branu s nasipom na svom nizvodnom (sljunkovitom) dijelu (sl. 3).

Slijede ove jednadžbe:

$$H(x, y, 0) = H_0(x, y) \quad \text{po domeni } D \quad (16)$$

$$\xi(x, y, 0) = \xi_0(x, y) \quad \text{na } C_f \quad (17)$$



Sl. 3. Shema toka podzemne vode kroz nasip
Oznake na slici imaju isto značenje kao i u relacijama (16) do (22)

Fig. 3. Scheme of groundwater flow through the dam
Marks on the diagram have the same significance as magnitudes in relations (16) to (22)

$$\begin{aligned} H(x, y) &= H_1 && \text{na } G_1 \\ H(x, y) &= H_2 && \text{na } G_2 \end{aligned} \quad (18)$$

$$K \left(\frac{\partial H}{\partial x} l_x + \frac{\partial H}{\partial y} l_y \right) = 0 \quad \text{na } G_3 \quad (19)$$

$$K \left(\frac{\partial H}{\partial x} l_x + \frac{\partial H}{\partial y} l_y \right) = \left(I - S y \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) l_y \quad \text{na } C_F \quad (20)$$

$$\xi(x, y, z, t) = H(x, y, \xi, t) \quad \text{na } C_F \quad (21)$$

$$H(x, y, t) = y \quad \text{na } S \quad (22)$$

gdje su:

- C_F — slobodno vodno lice,
- S — granica procjeđivanja (seepage face),
- G_1, G_2 — granice poznatog potencijala,
- G_3 — nepropusna granica,
- ξ — visina vodnog lica mjerena od podine,
- l_x, l_y — cosinusi kuteva normale na slobodnu površinu,
- I — veličina infiltracije,
- y — visina nivoa vode na granici procjeđivanja (S).

Relacije (16) i (17) su početni uvjeti matematičkog modela. Uvjetom (16) definirana je početna distribucija potencijala u regiji toka D , a uvjetom (17) definiran je početni položaj slobodne površine vode.

Granični uvjeti (18) opisuju granice poznatog potencijala. Granica s poznatim fluxom (nepropusna granica), opisana je uvjetom (19).

Relacije (20) i (21) predstavljaju granične uvjete za samu slobodnu površinu. Uvjet (20) opisuje flux preko granice koji se sastoji od infiltracije (evapotranspiracije) i količine vode koja se dobije ocjeđivanjem pora iz nesaturiranog dijela sloja nakon povlačenja nivoa slobodne površine.

Uvjetom (21) definiran je položaj slobodne površine u prostoru i vremenu.

Relacija (22) opisuje stanje na granici procjeđivanja podzemne vode u atmosferi (seepage face).

Primjena Galerkinove procedure na jednadžbu (15) uz pretpostavku da je $K = \text{const}$ preko pojedinog elementa rezultira sistemom integralnih jednadžbi:

$$\sum_{i=1}^N H_i \left\langle K \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x}, \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right\rangle - \int_G K \left(\frac{\partial H}{\partial x} l_x + \frac{\partial H}{\partial y} l_y \right) \Phi_j \, dc = 0$$

$$j = 1, 2, \dots, N \quad (23)$$

Koristeći granične uvjete (20) i (21) na dio granice koja se odnosi na slobodnu površinu, relacija (23) može se pisati u obliku:

$$\sum_I H_i \left\langle K \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x}, \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right\rangle - \int_{C_F} \left(I - \sum_I \frac{\partial H_i}{\partial t} S_y \right) \Phi_j \, l_y \, dC_F = 0$$

$$j = 1, 2, \dots, N \quad (24)$$

Preostali granični uvjeti čine doprinos koeficijentima matrice permeabilnosti A i poznatog vektora F .

Sistem jednadžba konačnih elemenata (24) može se pisati u razvijenom obliku

$$\sum_I \left[a_{ij} H_i + \sum_{C_e} \int S_y \Phi_j \frac{\partial H_i}{\partial t} l_y \, dc - Q_j - D_j \right] = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (25)$$

gdje su:

$$a_{ij} = \sum_e \iint_{D_e} K \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right) \, dD_e$$

$$Q_j = \sum_{C_s} \int q \Phi_j \, dc \quad (26)$$

$$D_j = \sum_{C_F} \int I \Phi_j \, l_y \, dc$$

Integracije u izrazima (26) se provode po površini elementa ili dijelu granice elementa.

TOK PREMA BUNARU

Alko se traži slika stanja u pojedinom bunaru i njegovom bližem okolišu, tada je povoljno kreirati odgovarajući numerički model baziran na jednadžbi koja opisuje tok prema bunaru. Jednadžba toka je obično u tom slučaju dana u cilindričnim ili radijalnim koordinatama u ovisnosti o karakteristikama porozne sredine.

Za radijalni (simetrični) tok prema bunaru, jednadžba toka se može pisati u obliku:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rK \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial h}{\partial z} \right) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (27)$$

Jednadžba (27) opisuje radijalni nestacionarni tok u zatvorenom sloju. Uz definirane početne i granične uvjete predstavlja matematički model toka k bunaru u izotropnoj sredini.

Početni uvjeti su obično dani kao definirana distribucija pijezometarskog nivoa ili sniženja pijezometarskog nivoa. Kada se radi o analizi toka prema bunaru povoljnije je koristiti sniženje pijezometarskog nivoa:

$$s = H_0 - h$$

gdje je:

H_0 — početni pijezometarski nivo.

Granični uvjeti (Neumanovi i Dirichtovi) i u ovom slučaju opisuju se na način kako je to definirano na početku rada. Kod simulacije rada bunara potrebno je tretirati još jedan granični uvjet kojim se definira ukupna količina crpljenja (infiltracije) u bunaru. Taj tip graničnih uvjeta koristi se obično kod opisa analitičkog modela radijalnog toka kada se radi o bunaru konačnog a ne infinitezimalno malog promjera.

Apromksimacija jednadžbe (17) pomoću konačnih elemenata baziranih na Galerkinovu pristupu ima oblik:

$$\iint_D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial \hat{s}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \hat{s}}{\partial z} \right) - S_s \frac{\partial \hat{s}}{\partial t} \right] \Phi_j dD = 0 \quad (28)$$

$$j = 1, 2, \dots, N$$

gdje je:

\hat{s} — apromksimativno rješenje dano relacijom:

$$\hat{s} = \sum_{i=1}^N s_i(t) \Phi_i(r, z) \quad (29)$$

Nakon uvrštenja (29) u sistem jednadžbi (28), te primjenom Greenova teorema slijedi:

$$\sum_e \left[\iint_{D_e} \left(K \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \frac{\partial \Phi_j}{\partial r} + K \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \right) s_i 2 \pi r dr dz + \right.$$

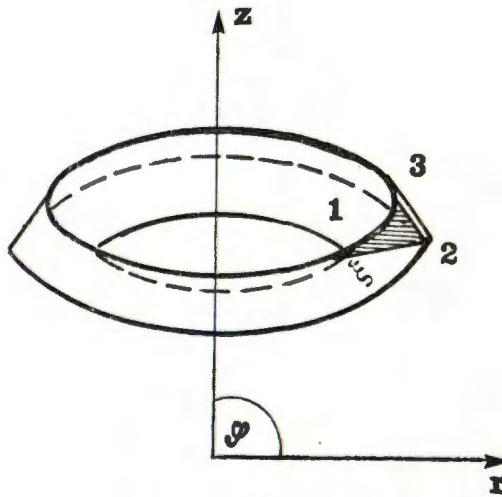
$$\sum_e \iint_{D_e} S_e \Phi_i \Phi_j \frac{ds_i}{dt} 2\pi r dr dz + \int_{C_e} q_n \Phi_j dc = 0 \quad (30)$$

$$j = 1, 2, \dots, N$$

gdje je:

q_n — flux u čvorovima mreže koji leže na stijenkama bunara; ($q_n = 0$ za sve druge čvorove).

Integracija i sumacija vrši se po površini elementa, odnosno po opsegu elementa, a sumacije po svim elementima mreže. Mogući oblik elementa je prikazan na slici 4.



Sl. 4. Element mreže s trokutnim presjekom, prema Huykornu i Pinderu (1983)

Fig. 4. Network element with triangle cross-section, according to Huykorn & Pinder (1983)

Vremenska derivacija u sistemu jednadžbi (30) može se prikazati konačnim diferencijama, pa se, u slučaju implicitne aproksimacije, dobije slijedeći sistem jednadžbi:

$$[C] \{s\}_{k+1} + \frac{[D]}{\Delta t} \left[\{s\}_{k+1} - \{s\}_k \right] + \{P\} = 0 \quad (31)$$

Nakon sređivanja matrice jednadžbe (31) slijedi konačni oblik sistema jednadžbi:

$$[A] \{s\}_{k+1} = \{E\} \quad (32)$$

gdje su:

$$[A] \equiv [C] + \frac{1}{\Delta t} [D]$$

$$\{E\} = \frac{1}{\Delta t} [D] \{s\}_k - \{P\} \quad (33)$$

A — matrica sistema, a definirana je: $[A] = \sum_c [A^c]$

E — poznati vektor definiran: $\{E\} = \sum_c \{E^c\}$

s — vektor rješenja sistema (32) s komponentama koje predstavljaju sniženje u čvorovima mreže na određenom vremenskom nivou.

Tipični elementi matrice A^c i vektora E^c mogu se prikazati relacijama:

$$a_{ij}^c = \iint_{De} \left[\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right) K + \frac{S_s}{\Delta t} \phi_i \phi_j \right] 2\pi r dr dz$$

$$e_{ij}^c = \iint_{De} \frac{S_s}{\Delta t} \phi_i \phi_j 2\pi r s_{ik} dr dz - \int_{Cc} q_n \phi_j dc \quad (34)$$

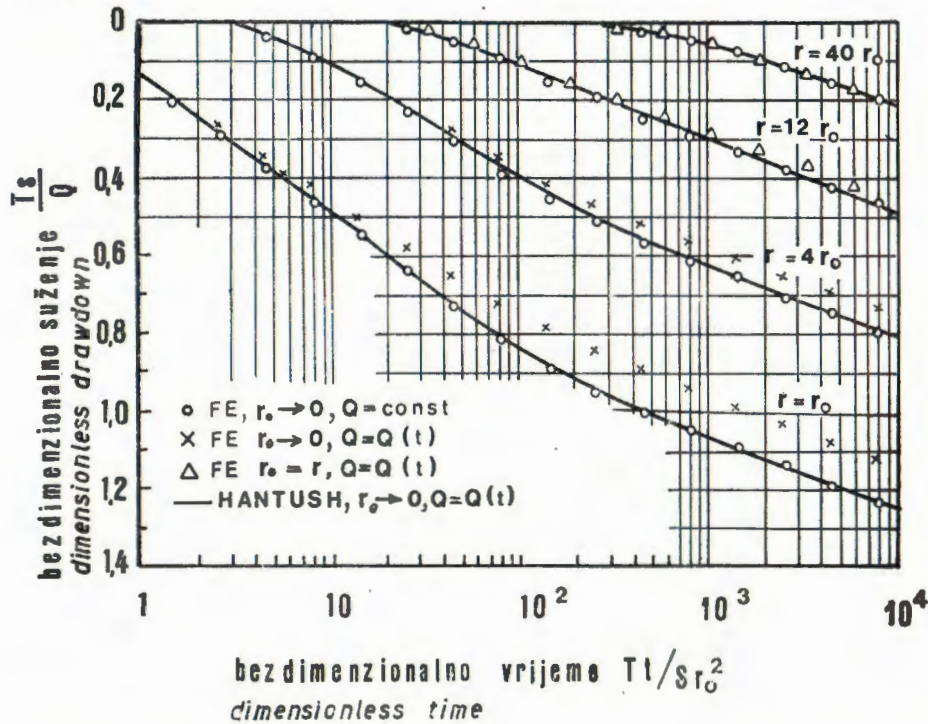
Nakon provedene integracije preko svakog elementa i sumacije preko elemenata dobije se sistem algebarskih jednadžbi, čije rješenje predstavlja numeričko rješenje jednadžbe (27).

Rješenje jednadžbe (27) je dobiveno uz pretpostavku da je bunar konačnog radijusa i završen a crpljenje je konstantno u vremenu. Ako se radi o promjenljivoj količini crpljenja u pojedinom čvoru što može biti posljedica rada nezavršenog bunara, tada se mora provoditi korekcija sniženja za točke u bunaru i blizini bunara (Huang, 1972). Navedeni autor dao je grafički rezultate testiranja kao rješenja za tok prema bunaru ako se on tretira kao matematički ponor i ako je konačnog radijusa i u uvjetima uniformnog i neuniformnog fluxa po čvorovima samih stijenci bunara. Numerička rješenja usporedio je s Hantushevima analitičkim rješenjem za završeni bunar koji se smatra matematičkim ponorom (sl. 5).

ZAKLJUČAK

U ovom radu opisane su inženjerske aktivnosti i specifični prirodni procesi pomoću numeričkih modela konačnih elemenata. Od inženjerskih aktivnosti tretirani su crpljenje i umjetna infiltracija. Pomoću opisa tih aktivnosti može se simulirati mnoštvo drugih složenih zahvata u hidrogeološkim sistemima. Od prirodnih procesa obrađeni su evapotranspiracija, infiltracija, međuslojno procjeđivanje i pojave karakteristične za otvorene vodonosne slojeve. Posebno je opisan i radijalni tok bunaru.

Matematički prikaz navedenih fenomena i aktivnosti omogućava jednostavnu simulaciju ponašanja različitih prirodnih ili inženjerskih sistema uključivanjem programskog modula koji opisuje odgovarajući do-



Sl. 5. Usporedba numeričkih rješenja s analitičkim rješenjem za tok prema bunaru, prema Huang (1972)
 r_0 — radijus bunara koji je tretiran kao matematički ponor,
 r — radijus realnog bunara

Fig. 5. Comparison of numerical and analytical solutions of the radial flow to the well, according to Huang, 1972
 r_0 — well radius treated as a mathematical sink,
 r — real well radius

gađaj. Za razliku od inače korištenih načina prikaza toka u otvorenom sloju u ovom radu je slobodna površina opisana egzaktnim analitičkim graničnim uvjetom relacija 23, 24 i 25. Posljednje doprinosi boljoj aproksimaciji opisa navedenog fenomena u numeričkim modelima.

Primljeno: 10. 01. 1989.

LITERATURA

- Bachte, K. J. & Wilson, E. L. (1976): Numerical methods in finite element analysis. Prentices Hall Inc., 528 str. Neh Jersey.
 Bredehoeft, J. D. & Pinder, G. F. (1970): Digital analysis of areal flow in mutiaquifer groundwater systems: a quasi three-dimensional model. *W. R. R.*, 6 (3), 883—888, Washington.
 Hantush, M. S. (1964): Hydraulics of wells, in V. T. Chow (ed.): *Advanced in hydroscience*, Academic press, 281—432, New York.

- Heinrich-Miletić, M. (1989): Rješavanje matematičkih modela toka podzemnih voda primjenom metode konačnih elemenata. *Geol. vjesnik*, 42, 213—219, Zagreb.
- Huykorn, P. S. & Pinder, G. F. (1983): *Computational Methods in Subsurface Flow*. Academic Press, 473 str., New York.
- Hyang, Y. H. (1972): Finite element analysis of flow towards artesian well. *J. of hydraulics div. Vol. 98, No. HY11*, 2055—2059, Washington.
- Pinder, G. F. & Gray, W. G. (1977): *Finite element simulation in surface and subsurface hydrology*. Academic press, 295 str., New York.

Numerical models of Engineering Hydrogeological Systems II Finite Element Method

M. Heinrich-Miletić

This work discusses engineering activities and natural processes by use of finite elements numerical model. Pumping and artificial infiltration representing engineering activities are treated. Describing these activities a lot of other complex operations in hydrogeologic systems can be simulated. As natural processes, evapotranspiration, infiltration, natural percolation and occurrences characteristic for water table aquifer are considered. The radial flow to the well is particularly discussed.

Mathematical presentation of the discussed phenomena and activities enable simple behaviour simulation of different natural or engineering systems including the program modul describing certain occurrence. Rather than usually used ways of flow presentation in water table aquifers this work describes free surface by exact analytical boundary condition relations 23, 24 and 25. The last one contributes to a better description approximation of the concerned phenomenon in numerical models.