GEOLOŠKI VJESNIK	Vol. 43	str. 143–148	Zagreb, 1990.

UDK 556.013:532.546 *Izvorni znanstveni članak*

Primjena metode graničnih elemenata u simulacijama toka fluida u poroznoj sredini

Marija HEINRICH-MILETIĆ

Rudarsko-geološko-naftni fakultet, Pierottijeva 6, YU-41000 Zagreb

Ključne riječi: Numerički modeli toka podzemne vode, Metoda graničnih elemenata

Opisana je primjena metode graničnih elemenata u simulacijama strujanja fluida u poroznoj sredini. Za ilustraciju razmatran je 2D tok podzemne vode u otvorenom sloju.

Key words: Numerical models of groundwater flow, Boundary element method

The application of boundary element method in simulations of flow in porous media is described. The 2D flow of groundwater is discussed as example.

Uvod

Metoda graničnih elemenata se često koristi u simulacijama toka fluida u poroznoj sredini, ako je stanje fluida opisano Laplaceovom jednadžbom. Prednosti ove metode u odnosu na druge numeričke metode su u mogućnosti određivanja rješenja jednadžbe toka na granici domene, ako nisu poznate vrijednosti potencijala fluida ili njegove normalne derivacije u svim točkama granice. Jednom određene navedene vrijednosti mogu se koristiti za određivanje distribucije potencijala po kompletnoj domeni integracije. Kao povoljna karakteristika ove metode je i svojstvo da se u proračunima efektivno smanjuje »dimenzija« modela. Naime, 3D i 2D problemi toka tretiraju se primjenom konturnog integrala koji se obično javlja kod opisa 1D strujanja fluida.

Teoretska osnova

Teoretsku osnovu metode graničnih elemenata predstavlja drugi Greenov identitet. Taj osnovni teorem divergencije vektora može se u matematičkoj notaciji izraziti kao:

$$\int_D \nabla \vec{F}\, dV = \int_S \vec{F}\vec{n}\, ds \qquad (1)$$

gdje su:

F – kontinuiran derivabilan vektor

∇ – nabla operator

D – domena integracije

dV – djelić volumena domene D

s – granica domene

n – normala na domenu D

ds – djelić površine domene D.

Ako se vektor F definira u prvom koraku kao

$$F = \Phi \nabla \psi \qquad (2)$$

a u drugom koraku kao

$$F = \psi \nabla \Phi \qquad (3)$$

gdje su:

Φ, ψ – proizvoljne dva puta derivabilne kontinuirane funkcije.

Nakon uvrštavanja (2) u identitet (1) slijedi:

$$\int_D (\nabla\Phi\nabla\psi + \Phi\nabla^2\psi)\, dV = \int_S \Phi\nabla\psi\, n\, ds \qquad (4)$$

Ekvivalentni izraz dobije se uvrštavanjem (3) u (1)

$$\int_D (\nabla\Phi\nabla\psi + \psi\nabla^2\Phi)\, dV = \int_S \psi\nabla\Phi\, n\, ds \qquad (5)$$

oduzimanjem (5) od (4) dobije se drugi Greenov identitet:

$$\int_D (\Phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\Phi)\, dV = \int_S \left(\Phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right) ds \qquad (6)$$

gdje je:

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = n\,\nabla\psi \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = n\frac{\partial\Phi}{\partial n} \qquad (7)$$

Ako se za funkcije Φ i ψ odaberu osnovna rješenja Laplaceove jednadžbe kao što su:

- za 3D strujanje: funkcija lnr
- za 2D strujanje: funkcija l/r

to će imati za posljedicu reduciranje jednadžbe (6) na oblik:

$$\int_S \left(\Phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right) ds = 0 \qquad (8)$$

U ovom radu bit će tretirana samo ravninska stacionarna strujanja fluida u homogenoj izotropnoj sredini koja se mogu opisati odgovarajućim Laplaceovim jednadžbama.

U navedenim uvjetima, jednadžba (8) primjenjena na strujanje podzemne vode, sadrži funkcije Φ i ψ koje predstavljaju brzinski potencijal, odnosno odgovarajuću prostornu Greenovu funkciju.

Radijalno stacionarno strujanje podzemne vode

U slučaju radijalnog stacionarnog toka koji je opisan diferencijalnom jednadžbom,

$$\frac{d^2h}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dh}{dr}=0 \tag{9}$$

gdje su (za jednadžbe 8 i 9):

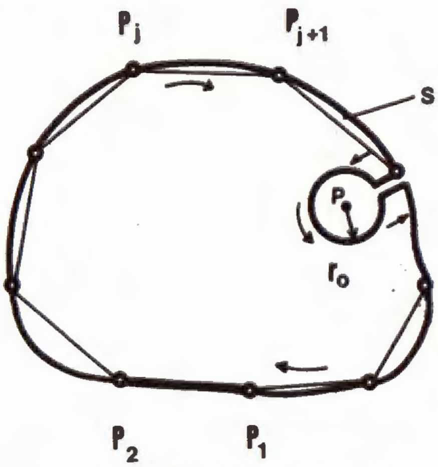
h – potencijal podzemne vode

Φ = h

ψ = lnr

S – krivulja koja određuje domenu integracije.

Prvi korak u rješavanju polazne diferencijalne jednadžbe je podjela granice S na niz linijskih elemenata (sl. 1) preko kojih se provodi pojedinačno izračunavanje vrijednosti određenih integrala.



Sl. 1 Granica domene podijeljena čvorovima na elemente.

Fig. 1 Discretization of boundary in elements.

U procesu integracije potrebno je izdvojiti singularnu točku (r = 0) kružnicom vrlo malog radijusa r_o (sl. 1), i preko tog područja provesti zasebno integriranje.

$$\int_S\left(h\frac{\partial}{\partial n}\ln r+\ln r\frac{\partial h}{\partial n}\right)ds+$$

$$+\oint_{r_o}\left(h\frac{\partial(\ln r)}{\partial n}-\ln r\frac{\partial h}{\partial r}\right)=0 \tag{10}$$

Vrijednost krivuljnog integrala po kružnici radijusa r_o iznosi $-2\pi hp$, pa se jednadžba (10) može pisati u obliku (Huykorn i Pinder, 1983):

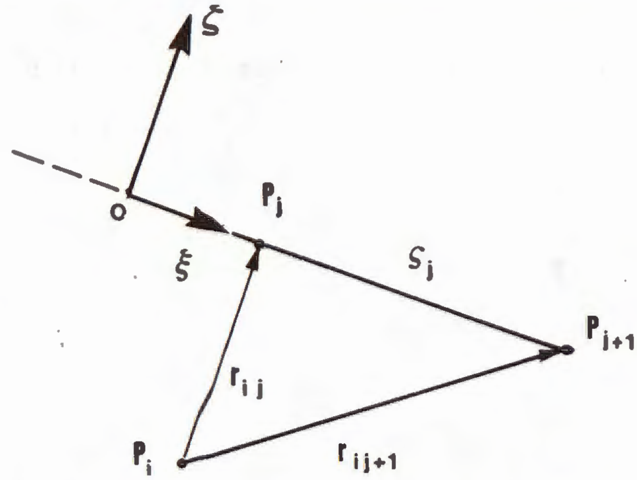
$$hp=\frac{1}{2\pi}\int_S\left(h\frac{\partial}{\partial n}\ln r-\ln r\frac{\partial h}{\partial n}\right)ds \tag{11}$$

gdje su:

P – točka singulariteta Laplaceove jednadžbe (vidi sl. 2)

hp – vrijednost potencijala u točki P.

Izraz (11) može u prvom koraku koristiti za određivanje vrijednosti h ili $\partial h/\partial n$ u pojedinim točkama granice u kojima nisu poznate obje te vrijednosti. U tom slučaju točka P se locira na granicu i od nje kao bazične točke određuju položaji svih ostalih točaka granice (sl. 2).



Sl. 2 Prikaz diskretizacije granice uz određeni izbor bazične točke P_i

Fig. 2 Discretization of boundary with chousen basic point P_i

Vrijednost integrala (10) za bilo koju točku granice koja je na udaljenosti (r) od bazične točke P_i (u slučaju glatkog dijela granice oko izabrane točke) je jednaka (Ligget i Liu, 1983):

$$\pi hp=\int_S\left(h\frac{\partial}{\partial n}\ln r-\ln r\frac{\partial h}{\partial n}\right)ds \tag{12}$$

Za svaki položaj bazične točke dobije se određena jednadžba tipa (12). Premještanje bazične točke po čvorovima granice rezultira sistemom jednadžbi po nepoznanicama h ili $\partial h/\partial n$.

Integracija po granici domene

Za segment granice S_j uz određeni položaj bazične točke P_i, integral po konturi će biti oblika (sl. 3):

$$\int_{S_j}\left(\frac{h}{r}\frac{\partial r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial h}{\partial n}\right)ds=$$

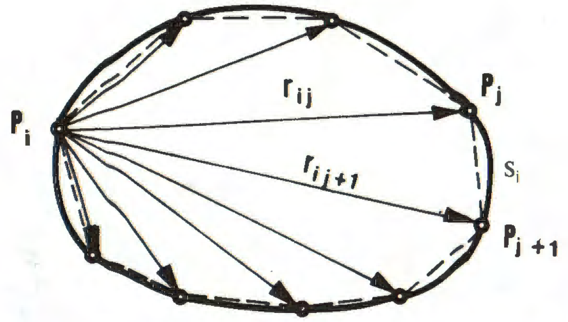
$$=\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}}\left(\frac{h}{r_{ij}}\frac{\partial r_{ij}}{\partial n}-\ln r_{ij}\frac{\partial h}{\partial n}\right)ds \tag{13}$$

Integracija u desnom integralu (13) provodi se lokalnim koordinatama (Liggett i Liu, 1983).

Nakon provedene integracije po svim elementima granice koristeći redom sve točke P_i (i = 1, 2, . . . N) kao bazične, dobije se sistem od N algebarskih linearnih jednadžbi s isto toliko nepoznanica.

$$[A]\{h\}+[B]\left\{\frac{\partial h}{\partial n}\right\}=0 \tag{14}$$

Elementi matrica A i B ovise isključivo o geometriji granica.



Sl. 3 Segment granice S_j s graničnim čvorovima P_j i P_{j+1} smješten u lokalni sustav (ξ, η)

Fig. 3 Segment of the boundary S_j with boundary points P_j and P_{j+1} located in a local coordinate sistem (ξ, η)

Integracija po unutrašnjosti domene

Za određivanje vrijednosti potencijala u bilo kojoj točki unutrašnjosti domene koristi se izraz (11) uz uvjet da su u svim točkama granice poznate vrijednosti h i $\partial h/\partial n$.

Interpolacija vrijednosti funkcija između čvorova

Za određivanje vrijednosti h i $\partial h/\partial n$ između čvorova, najčešće se koristi linearna interpolacija, zbog svoje jednostavnosti primjene.

U slučaju linearne interpolacije za segment granice S_j (sl. 3) koji određuju čvorovi P_j i P_{j+1} vrijede relacije (Ligget, 1977):

$$
\begin{aligned}
h &= \frac{h_{j+1} - h_j}{\xi} + \frac{\xi_{j+1} h_j - \zeta_j h_{j+1}}{\zeta_{j+1} - \xi_j} \\
\frac{\partial h}{\partial n} &= \left[\left(\frac{\partial h}{\partial n}\right)_{j+1} - \left(\frac{\partial h}{\partial n}\right)_j\right]\xi + \\
&+ \left[\zeta_{j+1}\left(\frac{\partial h}{\partial n}\right)_j - \xi_j\left(\frac{\partial h}{\partial n}\right)_{j+1}\right] \Big| (\xi_{j+1} - \zeta_j)
\end{aligned}
\tag{15}
$$

gdje je:

ξ – dužina mjerena duž segmenta S_j od ishodišta lokalnog koordinatnog sustava.

Otvoreni vodonosni sloj

Stacionarni tok

Laplaceova jednadžba predstavlja osnovu matematičkog modela kojim je opisan tok u otvorenom sloju.

Za definiranje granice koju čini slobodna površina u slučaju stacionarnog toka koriste se slijedeće relacije:

$$H = z(x,y) \quad \text{na } G \tag{16}$$

$$\frac{\partial H}{\partial n} = 0 \quad \text{na } G \tag{17}$$

gdje su:

H – elevacija slobodne površine mjerena od referentne ravnine,

G – slobodna površina podzemne vode.

Slobodna površina je u slučaju stacionarnog toka strujnica pa je ta činjenica izražena graničnim uvjetom (17). Kako se radi o potencijalnom tečenju vrijedi i Bernoullijeva jednadžba:

$$\frac{p}{\varrho g} + z + \frac{v^2}{2g} = E \tag{18}$$

gdje su:

p – tlak (atmosferski)

v – brzina toka, $v = \partial h/\partial s$

E – specifična mehanička energija ($E = \text{const}$)

s – dužina slobodne površine.

Kombinirajući uvjete (16), (17) i (18) uz $p = 0$ slijedi jednadžba:

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{\partial H}{\partial s}\right)^2 + z = E \tag{19}$$

Jednadžba (19) opisuje granične uvjete na slobodnoj površini u slučaju stacionarnog toka podzemne vode.

Rješenje polazne Laplaceove jednadžbe uz granični uvjet (19) može se odrediti samo iteracijskim postupkom. Očito je da granični uvjet sadrži varijablu čija vrijednost se određuje postupkom rješavanja jednadžbe toka.

U prvom koraku pretpostavi se neki položaj slobodne površine (z_i°, $i = 1, 2, \ldots N$). Za svaku točku granice određuje se vrijednost E po relaciji

$$E_i = z_i + \frac{1}{2g}\left(\frac{\partial H_i}{\partial n}\right)^2 \tag{20}$$

Srednja vrijednost veličine E određuje se kao aritmetička sredina izračunatih vrijednosti po čvorovima granice prema (20):

$$\bar{E} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E_i \tag{21}$$

Iteracijski postupak za određivanje elevacije slobodne površine može se pisati kao:

$$z_i^l = z_i^{l-1} + \Delta z_i \tag{22}$$

gdje su:

z_i – elevacija slobodne površine u i-tom čvoru

1 – broj iteracijskog koraka

Δz_i – promjena u elevaciji u i-tom čvoru u određenom iteracijskom koraku.

Distribucija Δz_i po čvorovima dobije se kao rješenje slijedećeg sistema jednadžbi:

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial E_j}{\partial z_j}\Delta z_i = \bar{E} - E_i \qquad i = 1, 2, \ldots, N \tag{23}$$

Koeficijenti sistema $\partial E_j/\partial z_j$ određuju se, da se ova vrijednost zamijeni u svakoj točki (j) slobodne površine s veličinom Δz_j koja označava malu promjenu po vertikali. Desna strana jednadžbe (23) je standardno odstupanje veličine E za i-ti čvor slobodne površine.

Dobivene vrijednosti Δz_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ korigiraju položaj slobodne površine prema relaciji (22).

U iteracijama koristi se slijedeći kriterij uspješnosti provedenog postupka:

$$|\bar{E} - E_i| < \varepsilon \qquad i = 1, 2, \ldots, N \tag{24}$$

gdje je:

ε – proizvoljno uzeta mala vrijednost, koja osigurava konvergenciju iteracijskog postupka.

Distribucija Δz_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ definira položaj odnosno visinu slobodne površine podzemne vode u odnosu na referentnu ravninu.

Nestacionarni tok

Nestacionarni tok u otvorenom vodonosnom sloju, ako je sredina homogena i izotropna, može se također opisati Laplaceovom jednadžbom, s time što se nestacionarnost pojave prikazuje odgovarajućim graničnim uvjetima za slobodnu površinu.

Granični uvjeti za tečenje sa slobodnom površinom mogu se pisati u obliku (Bear, 1972):

$$H = z(x,y,t) \qquad \text{na } G \tag{25}$$

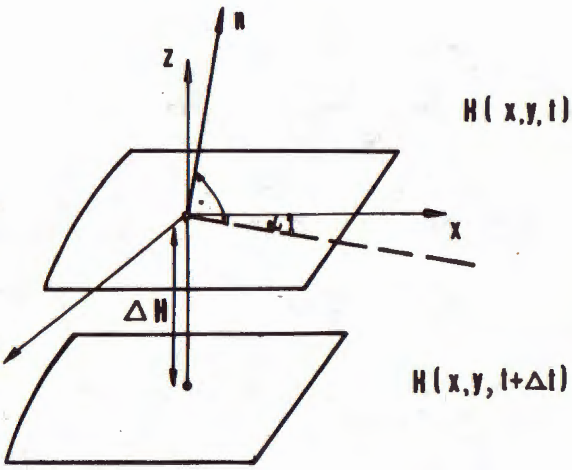
$$\vec{v}\vec{n}_o = n_{ef}\frac{\partial z}{\partial t} \qquad \text{na } G \tag{26}$$

gdje su:

- z – elevacija slobodne površine
- H – potencijal podzemne vode mjeren od referentne ravnine
- G – slobodna površina
- n_{ef} – efektivna poroznost
- v – brzina pomicanja slobodne površine
- n_o – jedinični vektor normale na slobodnu površinu.

Prvi uvjet izražava činjenicu da na slobodnu površinu djeluje atmosferski tlak.

Drugi uvjet je ustvari jednadžba kontinuiteta za slučaj vertikalnog pomicanja slobodne površine (sl. 4).



Sl. 4 Položaj slobodne površine u vremenu.
Fig. 4 Free surface position in time.

Normalna komponenta brzine može se izraziti putem Darcyeva zakona kao:

$$v_n = -K\frac{\partial H}{\partial n} \tag{27}$$

gdje je:

K – koeficijent filtracije.

Jedinični vektor normale izražen pomoću odgovarajućih promjena elevacije podzemne vode je oblika

$$n_o = \frac{1}{\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right]^{1/2}} \tag{28}$$

Uvrštavajući (27) i (28) u jednadžbu (26) slijedi

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{K}{n_{ef}}\frac{\partial H}{\partial n}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right]^{1/2} \tag{29}$$

Promjena položaja slobodne površine odgovara promjeni potencijala u vremenu

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{K}{n_{ef}}\frac{\partial H}{\partial n}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right]^{1/2} \tag{30}$$

U slučaju toka u (X,Z) ravnini jednadžba (30) se reducira na oblik:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{K}{n_{ef}}\frac{\partial H}{\partial n}(1 + \mathrm{tg}^2\alpha)^{1/2} \tag{31}$$

gdje je:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\partial z}{\partial x}$$

Aproksimacija jednadžbe (31) pomoću izraza za konačne diferencije rezultira slijedećom shemom:

$$H_{k+1} = H_k - \frac{K\Delta t}{n_{ef}}(1 + \mathrm{tg}^2\alpha_k)^{1/2}\left[\omega\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_{k+1} + (1-\omega)\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_k\right] \tag{32}$$

gdje su:

- ω – težinski faktor čija vrijednost se nalazi u intervalu [0,1]
- Δt – vremenski inkrement
- k – indeks vremenskog nivoa.

Za male nagibe slobodne površine prema horizontali, $\mathrm{tg}\alpha \approx 0$. Ta aproksimacija je često moguća u praktičnim proračunima ako su vremenski inkrementi relativno mali. U navedenim uvjetima numerička shema je oblika:

$$H_{k+1} = H_k - \frac{K\Delta t}{n_{ef}}\left[\omega\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_{k+1} + (1-\omega)\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_k\right] \tag{33}$$

Numerička shema (32) ukomponirana u sistem jednadžbi (14) rezultira novim sistemom jednadžbi oblika:

$$[C]\{H\} + [D]\left\{\frac{\partial H}{\partial n}\right\} = 0 \tag{34}$$

Rješenje sistema jednadžbi (34) je distribucija potencijala i/ili njegove normalne derivacije na određenom vremenskom nivou.

Razlike sistema jednadžbi (34) u odnosu na sistem (14) su u broju nepoznanica. Kako se relacijom (31) izražavaju vrijednosti varijable H pomoću njenih normalnih derivacija to ima za posljedicu smanjenje broja nepoznanica za broj točaka na slobodnoj površini.

Rješavajući sistem jednadžbi (34) dobije se distribucija H i $\partial H/\partial n$ u točkama granice u kojima nisu bile poznate obje vrijednosti. Primjenom izraza (11) dobije se distribucija H u unutrašnjosti domene za određeni vremenski korak. Nakon toga provodi se iteracijska procedura opisana jednadžbom (33).

Naizmjenično rješavanje sistema jednadžbi (11) i primjene iteracijske procedure (33) dobiva se distribucija visina slobodne površine u vremenu.

Postupak je u praktičnoj primjeni vrlo efikasan i uz povoljno odabrane vremenske inkremente dobro konvergentan. To ima za posljedicu mogućnost simulacije za duge vremenske periode uz mali utrošak vremena i memorije računala.

Zaključak

Analiza primjene metode graničnih elemenata kod prikaza graničnih uvjeta na slobodnoj površini toka fluida u poroznoj sredini bio je osnovni interes ovog rada. U tom smislu izvedene su numeričke sheme (32) odnosno (33) koje zajedno sa sistemom jednadžbi (34) određuju raspodjelu potencijala fluida i/ili njegove normalne derivacije u vremenu.

Metoda graničnih elemenata inače je vrlo efikasna u rješavanju matematičkih modela kojima osnovu čini Laplaceova jednadžba. Zbog toga je, a i zbog razumijevanja istaknutog detalja, metoda kao takva, opisana opširnije. Tako je bilo moguće istaknuti njenu prednost i mogućnost određivanja vrijednosti potencijalka fluida i/ili njegove normalne derivacije u čvorovima granice gdje te vrijednosti nisu poznate.

Primljeno: 12. I. 1990.
Prihvaćeno: 7. V. 1990.

LITERATURA

Bear, J. (1972): Dynamics of Fluids in Porous Media, American Elsevier, 764 str., New York.

Huykorn, P. S. & G. F. Pinder (1983) Computional methods in subsurface flow. Academic press, 473 str., New York.

Ligget, J. A. (1977): Locations of free surface in porous media. J. Hyd. Div., Asce 103 (HY4), 353–365, New York.

Ligget, J. A. i P. L-F. Liu (1983): The boundary integral equation method for porous media flow. George Allen & Unwin, 255 str., London.

Application of boundary element method in the simulations of flow in porous media

M. Heinrich-Miletić

Boundary conditions of the fluid flow in porous media in unconfined aquifer is analised using the boundary element method. The numerical schemes (32) and (33) together with the sistem of equations (34) describe distribution of the fluid potential and/or its normal derivation in time.

The explication of the problem would not be complete without description of the boundary element method as a whole. The procedure of this numerical method is described therefore in the extent necessary for the understanding of the mathematical models based on the Laplaces equation.

Boundary element method for this kind of flow gives best results when used for solving of the mathematical models. Some advantages of the method is the possibility to find out the numerical values of the potencial and/or its normal derivation along the boundary points where those values are not known.